

DOI: 10.13382/j.jemi.B2002982

# 支持向量机评定同轴度误差测量不确定度\*

张珂<sup>1,2</sup> 张玮<sup>1,2</sup> 成果<sup>1,2</sup> 阎卫增<sup>3</sup> 郭新恒<sup>3</sup>

(1. 上海应用技术大学 机械工程学院 上海 201418; 2. 上海应用技术大学 上海物理气相沉积 (PVD) 超硬涂层及装备工程技术研究中心 上海 201418; 3. 上海人本集团有限公司 上海 201411)

**摘要:** 针对目前评定同轴度误差测量不确定度过程复杂,且误差分布未知的情况下很难估计测量结果的概率分布及其不确定度的问题,以现有少量数据为基础,基于支持向量机法求取被测量数据的概率密度,并利用所得概率密度分布进行数值积分,计算其估值和标准不确定度。通过实验结果证明了在小样本数据的条件下,支持向量机法得到的样本的最佳估值和方差的准确度。最后以一个工程实例即机床芯轴的一段阶梯轴的同轴度误差为测量对象进行实测实验,评定其测量不确定度,并对比《测量不确定度表示指南》法、蒙特卡洛法的评定结果,验证了方法的可靠性及准确度。

**关键词:** 支持向量机; 概率密度估计; 测量不确定度; 同轴度误差

**中图分类号:** TN06; TH161 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 460.40

## Evaluation of coaxiality error measurement uncertainty by support vector machine

Zhang Ke<sup>1,2</sup> Zhang Wei<sup>1,2</sup> Cheng Guo<sup>1,2</sup> Yan Weizeng<sup>3</sup> Guo Xinheng<sup>3</sup>(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China; 2. Shanghai Engineering Research Center of Physical Vapor Deposition Superhard Coating and Equipment, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China  
3. Shanghai C&U GmbH, Shanghai 201411, China)

**Abstract:** It is difficult to estimate the probability distribution and uncertainty of measurement results when the process of evaluating the uncertainty of coaxiality error measurement is complex and the error distribution is unknown. Based on a small amount of existing data, the probability density of the measured data is calculated by the support vector machine method (SVM), and the numerical integration of the obtained probability density distribution is carried out to calculate its estimation and standard uncertainty. The experimental results show that under the condition of small sample data, the best estimation and the accuracy of variance of the samples obtained by SVM are proved. Finally, the coaxiality error of the machine tool core shaft is taken as the experimental object, and the mentioned results are used as the experimental object. Methods to calculate the measurement uncertainty and the measurement uncertainty representation guide (GUM), Monte Carlo method (MCM) calculation results are compared to verify the simplicity, reliability and accuracy of the method.

**Keywords:** Support Vector Machine; probability density estimation; measurement uncertainty; coaxiality error

## 0 引言

测量不确定度是对测量结果不能确定的程度,其几何量要素操作是新一代产品几何技术规范(GPS)提

出的一个新的概念,是获得要素或要素特征值,以及它们的公称值和极限值所必需的特殊工具<sup>[1-2]</sup>。根据现代误差理论,在对工件尺寸进行测量并给出测量报告时,不仅要有尺寸测量结果,还需要其结果的不确定度<sup>[3]</sup>。

收稿日期: 2020-03-01 Received Date: 2020-03-01

\* 基金项目: 国家自然科学基金项目(11672186)、上海市联盟计划项目(LM2018-5)、上海应用技术大学协同创新基金(XTCX2018-13)资助项目

目前,国内外学者大多针对形状误差的测量不确定度进行了大量详细的研究,评定过程大多使用了国标中规定的《测量不确定度指南》法(GUMM)和蒙特卡洛法(MCM)。文献<sup>[4-11]</sup>都是在评定圆度误差测量不确定度时使用了 GUMM 和 MCM,并对评定结果进行了对比,可以看出在形状误差测量不确定度评定方面无论是理论还是实验上都有较好的研究进展,为工程应用提供了一定的基础。而由于位置误差需要同时考虑基准和被测要素等因素,使用 GUMM 或者 MCM 计算繁琐且容易在影响不确定度因素方面产生疏漏,因此研究成果相对较少。同轴度误差作为位置误差中的一种,对其不确定度分析时,由于同轴度误差模型的非线性,需要在不确定度传递公式计算合成不确定度加入泰勒级数展开中的高次二阶项,这就导致了大量的计算,因此其不确定度评定无论是 GUMM 还是 MCM 都较为复杂。

为了更全面考虑同轴度误差测量不确定度评定的影响因素,使评定计算更为简便,可以采用支持向量机法(SVM)对误差评定结果进行概率密度估计<sup>[12]</sup>。SVM 主要针对样本数量少且不进行主观假设概率密度估计,利用支持向量原理按测量数据估计其概率分布,得到概率密度函数,然后再通过对所得概率密度估计函数数值积分的方式计算样本的最佳估值和标准差<sup>[13-15]</sup>。本文以同轴度的测量不确定度评定为例,首先使用最小二乘法(LS)进行误差评定,不进行假设分布的条件下,基于误差评定结果估计概率密度函数进行同轴度误差测量不确定度评定的方法,由 SVM 训练后得到概率密度估计函数从而来计算其误差及测量不确定度,最后将得到的测量不确定度与 GUMM、MCM 计算所得结果对比,验证了方法的简便及准确。

## 1 同轴度误差的数学模型

同轴度误差是指被测实际轴线对其理想轴线(即基准轴线)的变动量。评定同轴度误差时,首先要确定被测实际轴线的位置,然后与基准轴线(即理想轴线)作位置上的比较,从而求得同轴度误差值。所以评定同轴度误差时,需要以下 3 个步骤。1) 确定基准要素和被测实际要素各采样截面的圆心;2) 确定基准轴线;3) 评定同轴度误差。将工件放置于空间直角坐标系中,对基准要素和实际要素在  $z$  轴方向将基准和被测圆柱分成  $n$  个采样横截面,在每个采样截面上取  $m$  个点进行测量,并拟合测得的各采样截面的圆心坐标。

确定基准轴线的参数方程,表示如下:

$$\frac{x - l_1}{k_1} = \frac{y - l_2}{k_2} = z \quad (1)$$

式中: $x, y, z$  为基准轴线上点坐标。

计算实际被测轴线的采样点到基准轴线的径向距离:

$$d_i = \sqrt{(x_i - l_1 - k_1 z_i)^2 + (y_i - l_2 - k_2 z_i)^2} \quad (2)$$

式中, $x_i, y_i, z_i$  为实际被测轴线上点的坐标值。取样点中对于最小二乘直线的距离最大的点为  $(x_M, y_M, z_M)$ ,则同轴度误差模型为:

$$f = 2\sqrt{(x_M - l_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - l_2 - k_2 z_M)^2} \quad (3)$$

## 2 同轴度误差的测量不确定度分析

形位误差测量中测量不确定度的影响因素很多,其主要影响来源于测量过程和评定过程中<sup>[16]</sup>。对于只有测量数据样本的情况,若没有充足的理由来选择某种解析分布函数,可通过概率密度估计的方法来确定出不带倾向性的被测量分布的形式及不确定度。

### 2.1 基于 SVM 概率密度函数估计

考虑到实际测量中经常会出现测量次数少、样本数量小的情况,将 SVM 引入不确定度的评定过程。由概率密度的定义可知,求概率密度估计就是求下式线性算子方程的解<sup>[12]</sup>:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \theta(x-t)p(t)dt \quad (4)$$

其中:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

且须符合下述条件:

$$p(x) \geq 0 \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1 \quad (6)$$

在式(4)这个线性算子方程中, $F(x)$  未知,但它有独立同分布的样本  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , 通过样本,可以构造出一个经验分布函数:

$$F_l(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \theta(x - x_i) \quad (7)$$

利用 SVM 法求线性算子方程:

$$Ap(x) = F(x) \quad (8)$$

就是在函数集式(9)中寻找目标函数。

$$p(x, w) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \varphi_r(x) = (w \cdot \Phi(x)) \quad (9)$$

令  $\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_N(x), \dots)$ ,  $A$  是运算算子,对函数  $p(x)$  运算之后,函数集映射为:

$$F(x, w) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \psi_r(x) = (w \cdot \Psi(x)) \quad (10)$$

$F(x, w)$  在像空间  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_N(t), \dots)$  中是线性的,其中:

$$\psi_r(x) = A\phi_r(t) \quad (11)$$

将像空间的生成核定义为:

$$K(x_i, x_j) = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r(x_i) \psi_r(x_j) \quad (12)$$

并将交叉核函数定义为:

$$\kappa(x_i, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r(x_i) \phi_r(t) \quad (13)$$

因此,求解线性算子方程的解的问题等价于在像空间  $F(x, w)$  中求解线性回归函数的问题,将问题转化成使用 SVM 法对  $(x_1, F(x_1), \dots, x_l, F(x_l))$  在像空间进行回归估计问题,其解为:

$$w = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \Psi(x_i) \quad (14)$$

将(14)带入式(9):

$$p(t) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \kappa(x_i^*, t) \quad (15)$$

式(15)系数应该满足:

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l \quad (16)$$

$$k(x_i, x) \geq 0 \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} k(x_i, x) dx = 1 \quad (17)$$

### 2.2 SVM 估计概率密度函数流程

利用 SVM 估计概率密度问题,所要做的工作如下:

1) 首先构造经验分布函数;2) 求解线性算子方程的解,即在像空间中求解对应的回归问题;3) 以 SVM 法为基础构造所需核函数  $K(x_i, x)$ ;4) 构造求解回归方程的交叉核函数  $\kappa(x_i, x)$ ;5) 根据核函数  $K(x_i, x)$ , 利用支持向量机方法求解回归问题,即找出支持向量  $x_i^*, i = 1, 2, 3, \dots, l$  和对应的系数  $(\alpha_i^* - \alpha_i), i = 1, 2, 3, \dots, l$ ;6) 利用这些支持向量及其对应的系数,得到解为式(15)。

### 2.3 基于 SVM 对误差的测量不确定度评定

对于小样本条件下,基于支持向量机估计概率密度对测量不确定度的合成计算流程分如下<sup>[17-18]</sup>。

(1) 根据 SVM 方法对小样本数据进行概率密度估计,得到概率密度估计函数  $P(x)$ 。

(2) 根据得到的概率密度函数计算样本的估值和标准偏差,所得标准偏差即为标准不确定度,计算公式分别为:

$$\hat{x} = \int_a^b xp(x) dx \quad (18)$$

$$u = \sqrt{\int_a^b (x - \hat{x})^2 p(x) dx} \quad (19)$$

## 3 实例

### 3.1 实验方案

实验中待测芯轴为长  $L = 223 \text{ mm}$ , 最大轴外圈  $\phi = 70 \text{ mm}$ , 使用德国蔡司 CMM PRISMO 9/13/7 ultra 型三坐标测量机,对阶梯轴外圈进行测量,如图 1 所示。测量工

件如图 2 所示,选择其中一段作为基准轴,采用圆周法进行测量,共测量 4 个截面,每个截面上等角度间隔地提取 16 个点。然后在被测轴上测量 4 个截面,每个截面上等角度间隔地提取 16 个点。



图 1 阶梯轴同轴度测量过程

Fig. 1 Measurement process of step shaft coaxiality



图 2 被测工件芯轴

Fig. 2 Mandrel of tested workpiece

### 3.2 仿真实验及测量数据处理

在基于 SVM 法评定同轴度误差的测量不确定度时,训练样本数目是概率密度估计极为重要的参数。首先,根据可知文献[13-14],在 SVM 算法的特性下,支持向量数目是远远小于训练样本数目的。文献[13]当分别取 20 个或 30 个样本数量进行多次模拟,支持向量数在 5~9 个。在本文实验中,先采用数字化仿真实验确定采样组数,作为估计概率密度的训练样本量。

本文做了多次数字化仿真实验,鉴于篇幅列举任意其中一次,取正态分布  $N(0, 0.01)$  中的 10 个伪随机数如表 1 所示,当取用不同的样本数量分别进行 5 次 SVM 法估计概率密度后得到标准差进行对比的结果如表 2 所示。从折线图可以看出,当样本数减小到 7 个时,所得的标准差值开始不稳定,如图 3 所示。因此,出于对测量的经济性和实用性考虑,本文实验采取 8 个样本进行概率密度估计。

表 1 服从正态分布  $N(0, 0.01)$  的伪随机数

Table 1 Pseudorandom number obeying normal distribution of  $N(0, 0.01)$

序号	1	2	3	4	5
随机数	-0.011 7	0.002 5	-0.002 6	-0.008 1	0.001 3
序号	6	7	8	9	10
随机数	-0.011 8	0.003 4	-0.015 9	-0.024 5	-0.002 1

表 2 基于 SVM 法在同一分布不同样本量下得到的标准差

Table 2 Standard deviation based on SVM method under the same distribution and different sample sizes

样本数目	1	2	3	4	5
10	0.007 8	0.007 8	0.007 8	0.007 8	0.007 8
9	0.007 9	0.007 8	0.007 5	0.007 9	0.007 7
8	0.007 9	0.007 9	0.007 7	0.007 9	0.007 7
7	0.008 0	0.004 3	0.007 4	0.007 98	0.004 1
6	0.005 6	0.007 3	0.007 4	0.003 9	0.008 1

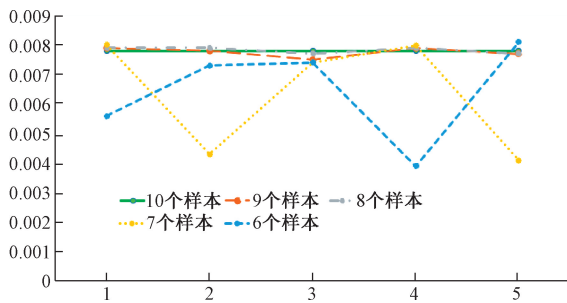


图 3 不同样本数目下 SVM 法标准差对比

Fig. 3 Comparison of standard deviation obtained by SVM method for different sample numbers

对测量数据使用神经网络法拟合圆心坐标<sup>[19]</sup>,再用式(1)对测量数据进行处理,得到基准轴线。由于测量原始数据过多,这里仅列出拟合后基准轴的圆心坐标数据(表 3)和被测轴的圆心坐标数据(表 4)。表格中共有 32 个圆心数据,取四个为一组,共 8 组。

### 3.3 基于 SVM 法对同轴度误差测量不确定度评定

对测量数据使用 2.1 节数学模型进行处理后,得到 8 组最小二乘同轴度误差评定结果,如表 5 所示。

表 5 最小二乘同轴度误差结果

Table 5 Results of least squares coaxiality error

序号	1	2	3	4
$\delta/\text{mm}$	0.082 283	0.082 475	0.077 480	0.084 873
序号	5	6	7	8
$\delta/\text{mm}$	0.089 514	0.073 693	0.079 691	0.077 133

表 3 被测轴拟合圆心坐标数据

Table 3 Coordinate data of fitting center of measured axis (mm)

序号	x	y	z	序号	x	y	z
1	0.000 22	0.003 90	20	17	0.014 14	0.007 53	36
2	0.010 09	0.006 32	21	18	0.003 32	0.005 32	37
3	0.010 34	0.002 34	22	19	0.006 20	0.004 36	38
4	0.050 36	0.003 00	23	20	0.000 35	0.001 81	39
5	0.012 13	0.000 36	24	21	0.019 53	0.007 66	40
6	0.020 65	0.001 16	25	22	0.008 81	0.001 35	41
7	0.033 00	0.001 90	26	23	0.011 37	0.000 57	42
8	0.040 89	0.015 54	27	24	0.033 98	0.005 87	43
9	0.034 69	0.018 62	28	25	0.010 72	0.010 35	44
10	0.002 63	0.005 57	29	26	0.007 22	0.012 76	45
11	0.002 04	0.020 89	30	27	0.014 83	0.014 72	46
12	0.003 75	0.005 25	31	28	0.052 34	0.017 51	47
13	0.010 27	0.017 46	32	29	0.032 06	0.018 90	48
14	0.004 07	0.009 40	33	30	0.030 89	0.018 41	49
15	0.001 08	0.006 21	34	31	0.034 14	0.009 12	50
16	0.002 75	0.004 78	35	32	0.003 10	0.002 47	51

表 4 基准轴拟合圆心坐标数据

Table 4 Coordinate data of reference axis fitting center (mm)

序号	x	y	z	序号	x	y	z
1	0.003 36	0.010 91	65	17	0.025 97	0.024 20	81
2	0.000 46	0.008 98	66	18	0.023 64	0.021 53	82
3	0.001 89	0.009 58	67	19	0.035 59	0.031 25	83
4	0.008 73	0.022 05	68	20	0.032 16	0.028 07	84
5	0.012 84	0.019 61	69	21	0.010 57	0.029 50	85
6	0.012 36	0.058 91	70	22	0.011 34	0.039 48	86
7	0.007 64	0.020 24	71	23	0.007 57	0.015 99	87
8	0.000 21	0.006 18	72	24	0.009 74	0.023 32	88
9	0.006 09	0.022 38	73	25	0.002 31	0.013 21	89
10	0.002 63	0.021 49	74	26	0.004 78	0.011 31	90
11	0.010 26	0.036 17	75	27	0.009 22	0.020 94	91
12	0.007 01	0.009 41	76	28	0.011 24	0.024 03	92
13	0.022 03	0.030 68	77	29	0.014 59	0.025 75	93
14	0.026 36	0.030 40	78	30	0.007 04	0.017 71	94
15	0.028 69	0.033 08	79	31	0.020 25	0.028 18	95
16	0.005 08	0.005 74	80	32	0.021 56	0.026 90	96

表 5 的 8 组圆度误差值  $\delta$  作为随机变量,基于支持向量机原理并根据 2.2 节步骤求解式(15),可以得到概率密度估计。

本实验采用的核函数为:

$$\begin{aligned}
 K(x_i, x_j) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left\{-\frac{(t_1 - \tau)^2}{2\sigma^2}\right\} dt_1 \int_{-\infty}^{x_j} \exp\left\{-\frac{(t_2 - \tau)^2}{2\sigma^2}\right\} dt_2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{x_j} \exp\left\{-\frac{(t_1 - t_2)^2}{4\sigma^2}\right\} dt_1 dt_2
 \end{aligned} \tag{20}$$

则交叉核函数为:

$$\kappa(x_i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left\{-\frac{(x - \tau)^2}{4\sigma^2}\right\} dx \quad (21)$$

令核函数中参数  $\sigma = 1$ , 另外由于在转化为二次规划问题的模拟结果与参数  $\varepsilon$  有较大关系, 而对参数  $\varepsilon$  主要由试验所得, 因此本文对  $\varepsilon$  取不同的值, 从中找出最好的结果, 最终选取  $\varepsilon = 0.1$ 。得到的  $(\alpha_i^* - \alpha_i)$  如表 6, 最终概率密度估计如图 4 所示。

表 6  $(\alpha_i^* - \alpha_i)$  结果  
Table 6 Results of  $(\alpha_i^* - \alpha_i)$

序号	1	2	3	4
$(\alpha_i^* - \alpha_i)$	-5.000 0	5.000 0	5.000 0	2.500 0
序号	5	6	7	8
$(\alpha_i^* - \alpha_i)$	-0.891 2	-1.769 7	0.160 9	-5.000 0

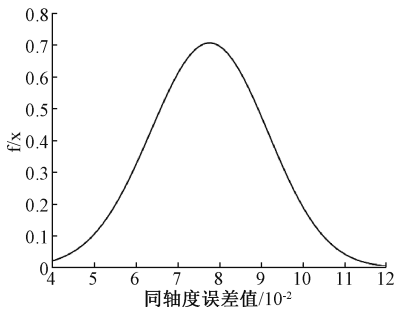


图 4 SVM 估计概率密度函数

Fig. 4 SVM estimation probability density function

确定积分区间为  $[0.073\ 693, 0.089\ 514]$ , 并已知式(15)的系数和交叉核函数后, 得到概率密度函数估计, 根据式(18)、(19)得到同轴度误差的估值  $\bar{\delta} = 0.083\ 2\ \text{mm}$ , 标准不确定度为  $u = 0.004\ 97\ \text{mm}$ 。

将上述实验过程及计算过程再重复进行 3 次, 得到的同轴度测量不确定度结果汇总如表 7 所示。

表 7 SVM 多次评定误差及测量不确定度结果

Table 7 Multiple evaluation error and measurement uncertainty results by SVM

序号	$\bar{\delta}/\text{mm}$	$u/\text{mm}$
1	0.083 2	0.004 970
2	0.081 7	0.004 278
3	0.085 1	0.004 534
4	0.082 0	0.004 840

### 3.4 基于 GUM 法对同轴度误差的不确定度评定

本实验使用的三坐标测量机测量待测件时,  $x, y, z$  方向测量长度分别为 700、700、1 500 mm。其单点测量不确定度主要来自于以下 4 个方面<sup>[20-22]</sup>。

#### 1) 重复性误差引入的不确定度分量

根据三坐标测量机的技术参数可知, 测量机重复性误差  $MPEP = 0.5\ \mu\text{m}$ , 并且服从正态分布, 则重复性误差

引起的测量不确定度分量  $u_1 = MPEP/\sqrt{3}$ 。

#### 2) 示值误差引入的不确定度分量

根据三坐标测量机的资料可知, 仪器的示值误差为  $MPEE = 0.8 + L/500\ \mu\text{m}$ , 认为其服从正态分布, 那么由示值误差引起的不确定度分量为  $u_2 = MPEE/\sqrt{3}$ 。

#### 3) 温度引起的不确定度分量

由于工件在测量过程始终在恒温下进行, 温度引起的不确定度近似为 0,  $u_3 = 0$ 。

#### 4) 测力变形引起的不确定度分量

在实际测量中测力变形引起的不确定度近似为 0,  $u_4 = 0$ 。

因此, 单点不确定度  $u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 2.079\ \mu\text{m}$ 。

同轴度误差模型为式(3), 基于 GUM 评定同轴度误差测量不确定度时, 包括基准的测量不确定度和被测要素的测量不确定度两部分, 分别计算后再进行合成。

首先对其基准轴线进行如下分析: 令  $\varepsilon_1 = x_M - l_1 - k_1 z_M, \varepsilon_2 = y_M - l_2 - k_2 z_M$ , 则  $f = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ 。

由于上式明显是非线性, 因此在使用不确定度传递公式计算合成不确定度时需加入泰勒级数展开式中的高次二阶项。根据不确定度的合成公式, 同轴度的不确定度的计算公式为<sup>[16]</sup>:

$$u_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 u^2(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 \right]^{1/2} + \left[ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_i^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j) \right\}^{1/2}$$

其中, 传递系数计算结果分别为:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = -1.190\ 8, \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} = -1.606\ 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1^2} = 25.022\ 9, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2^2} = 13.743\ 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1} = 25.022\ 9$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1^3} = -866.386\ 5, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2^3} = -642.090\ 4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1 \varepsilon_2^2} = 577.590\ 9, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2 \varepsilon_1^2} = 428.060\ 1$$

由前面分析已知  $\varepsilon_1 = x_M - l_1 - k_1 z_M, \varepsilon_2 = y_M - l_2 - k_2 z_M$ , 并且  $l_1, l_2, k_1, k_2$  是由大量测量点的坐标值计算得到的, 因此  $l_1, l_2, k_1, k_2$  之间的相关系数近似为 0<sup>[16]</sup>。上式可化简为:

$$u_{\varepsilon_1} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_1}^2 + z_M u_{k_1}^2} \quad (22)$$

$$u_{\varepsilon_2} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_2}^2 + z_M u_{k_2}^2} \quad (23)$$

其中,  $u_0$  为单点测量不确定度, 代入计算后可得,

$$\frac{\partial l_1}{\partial a_k} = \frac{\partial l_2}{\partial b_k} = -0.01176, \frac{\partial k_1}{\partial a_k} = \frac{\partial k_2}{\partial b_k} = -0.00203, u_{a_k} =$$

$$u_{b_k} = \frac{1}{\sqrt{m}} u_0 = 0.368 \mu\text{m}, \text{因此 } u_{l_1} = u_{l_2} = 2.4455 \times 10^{-5} \mu\text{m},$$

$$u_{k_1} = u_{k_2} = 4.2289 \times 10^{-6} \mu\text{m}。$$

将上述结果代入式(22)、(23), 得到  $u_{\varepsilon_1} =$

$$u_{\varepsilon_2} = 0.000336 \mu\text{m}。$$

根据 GUM 法将推导出来的传递系数和各参数测量不确定度以及单点测量不确定度的值代入公式后, 求出被测工件基准轴线误差的测量不确定度为  $u_f = 0.004164 \text{ mm}。$

被测要素的不确定度影响因素主要是单点不确定度, 同轴度误差的测量不确定度合成可以基于黑箱模型, 即:

$$u = \sqrt{u_f^2 + u_0^2} = 0.004654 \text{ mm}$$

因此, 由式(3)得到同轴度误差的估计值为  $\bar{\delta} = 0.0836 \text{ mm},$  其测量不确定度值为  $u = 0.004654 \text{ mm}。$

### 3.5 基于蒙特卡洛法对同轴度误差的测量不确定度评定

利用蒙特卡洛伪随机数原理, 根据误差模型, 产生服从正态分布的伪随机数序列值。选取样本容量为  $M = 20000,$  根据所得伪随机数, 求出 20000 个  $f$  的值后, 构建出同轴度误差概率分布, 其概率分布根据 MATLAB 中的直方图(横坐标为同轴度误差值, 纵坐标为其分布频数), 如图 5 所示。而式(3)误差模型中的 7 个参数期望为各参数的测量值, 方差为各参数的测量不确定度。

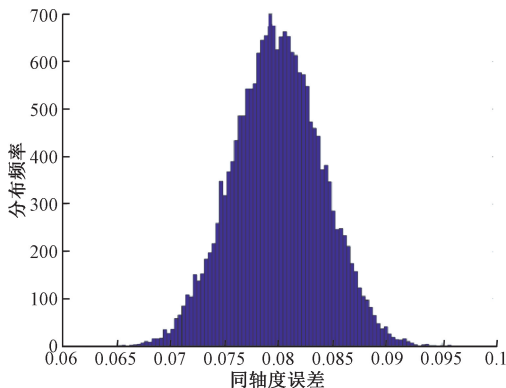


图 5 MCM 概率分布频数

Fig. 5 Probability distribution frequency of MCM

通过 MCM 计算得到的同轴度误差估值  $\bar{\delta} = 0.0829 \text{ mm},$  不确定度为  $u = 0.004123 \text{ mm}。$

3 种方法估计的测量不确定度的评定结果对比如表 8 所示, 其中 SVM 法取 4 次结果的平均值。

表 8 不同方法评定结果对比

Table 8 Comparison of evaluation results of different methods

评定方法	$\bar{\delta}/\text{mm}$	$u/\text{mm}$
SVM	0.0830	0.004656
GUM	0.0836	0.004654
MCM	0.0829	0.004123

由表 8 可见, 3 种方法评定出的结果基本一致。然而 GUM 评定过程比较复杂, 且 GUM 和 MCM 在单点不确定度合成时容易忽略掉一些影响不确定度因素, 导致评定结果并不是十分精准。相对而言, 基于 SVM 法过程简单结果可靠, 而且无需假设样本分布。

## 4 结论

本文基于支持向量机法由同轴度误差评定结果作为样本数据确定其测量不确定度的概率密度分布, 根据所求的概率密度计算其测量不确定度。文中通过数字化实验及一个工程实例即机床芯轴的一段阶梯轴的同轴度误差为测量对象进行实测实验, 评定其测量不确定度, 并对比 GUMM、MCM 的评定结果, 验证了本文方法的精确度和简便可行性。该方法也可为其他形位公差评定测量不确定度时提供参考。

## 参考文献

- [1] 中国计量研究院. 测量不确定度的评定与表示: JJF1059.1-2012[S]. 国家质量监督检验检疫总局, 2012.  
China institute of metrology. *Evaluation and expression of measurement uncertainty: jjf1059.1-2012* [S]. General administration of quality supervision, inspection and quarantine, 2012.
- [2] 王汉斌, 陈晓怀, 程银宝, 等. 基于新一代 GPS 的产品检验符合性不确定度评定[J]. 机械工程学报, 2016, 52(24): 194-200.  
WANG H B, CHEN X H, CHENG Y B, et al. Evaluation of product conformity uncertainty based on new generation GPS [J]. *Journal of mechanical engineering*, 2016, 52(24): 194-200.
- [3] 陈怀艳, 曹芸, 韩洁. 基于蒙特卡罗法的测量不确定度评[J]. 电子测量与仪器学报, 2011, 25(4): 301-308.  
CHEN H Y, CAO Y, HAN J. Evaluation of measurement uncertainty based on Monte Carlo method [J]. *Journal of Electronic Measurement and Instruments*, 2011, 25(4): 301-308.
- [4] 何改云, 黄鑫, 郭龙真. 自由曲面轮廓度误差评定及不确定度分析[J]. 电子测量与仪器学报, 2017, 31(3):

- 395-401.  
HE G Y, HUANG X, GUO L ZH. Error evaluation and uncertainty analysis of freeform surface profile [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2017,31 (3): 395-401.
- [ 5 ] 王东霞,温秀兰,乔贵方. 工件圆度误差测量不确定度评定[J]. 光学精密工程,2018,26(10):2438-2445.  
WANG D X, WEN X L, QIAO G F. Evaluation of uncertainty of workpiece roundness error measurement [J]. Optical and Precision Engineering, 2018, 26(10): 2438-2445.
- [ 6 ] 吴呼玲. 蒙特卡罗法评定圆度测量不确定度[J]. 自动化仪表, 2018,39(5):64-68.  
WU H L. Evaluation of roundness measurement uncertainty by monte carlo method [J]. Automatic instrument, 2018,39(5):64-68.
- [ 7 ] 连慧芳,陈晓怀. 基于蒙特卡罗方法的圆度测量不确定度评定[J]. 工具技术, 2010, 44(6):82-84.  
LIAN H F, CHEN X H. Evaluation of roundness measurement uncertainty based on monte carlo method [J]. Tool technology, 2010, 44(6):82-84.
- [ 8 ] 魏明明. 蒙特卡洛法与 GUM 评定测量不确定度对比分析[J]. 电子测量与仪器学报,2018,32(11):17-25.  
WEI M M. Comparative analysis of measurement uncertainty between Monte Carlo method and gum evaluation [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2018,32 (11): 17-25.
- [ 9 ] 丁家满,原琦,任东磊,等. 不确定性信息条件下系统可靠性分析[J]. 仪器仪表学报, 2019,40(4):153-162  
DING J M, YUAN Q, REN D L, et al. System reliability analysis under uncertainty information [J]. Journal of Instrumentation, 2019,40 (04): 153-162.
- [10] CHIABERT P, MADDIS M D, RUFFA S, et al. Probabilistic method in form error evaluation: comparison of different approaches [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 92 (1-4): 447-458.
- [11] CHIABERT P, DE MADDIS M, GENTA G, et al. Evaluation of roundness tolerance zone using measurements performed on manufactured parts: A probabilistic approach[J]. Precision Engineering, 2018,52(2)434-439.
- [12] 徐玉兵. 基于支持向量机的概率密度估计及其在分布估计算法中的应用[D]. 太原:太原科技大学,2009.  
XU Y B. Probability density estimation based on support vector machine and its application in distribution estimation algorithm [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2009.
- [13] 王辉. 基于 SVM 的小样本数据不确定度的研究[D]. 中国海洋大学,2008.  
WANG H. Study on uncertainty of small sample data based on SVM [D]. Qingdao: China Ocean University, 2008.
- [14] 张雪原. 一种改进的基于支持向量机的概率密度估计方法[J]. 潍坊学院学报,2011,11(6):126-130,150.  
ZHANG X Y. An improved probability density estimation method based on support vector machine [J]. Journal of Weifang University, 2011,11 (6): 126-130,150.
- [15] 胡勇. 基于支持向量机的概率密度估计[D]. 成都:四川大学,2007.  
HU Y. Probability density estimation based on support vector machine [D]. Chengdu: Sichuan University, 2007.
- [16] 连慧芳. 形位误差测量的不确定度评定[D]. 合肥:合肥工业大学,2010  
LIAN H F. Evaluation of uncertainty in shape and position error measurement [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2010.
- [17] 张珂,成果,阎卫增. 圆度误差不确定度的 PDF 优化估计评定[J]. 机械科学与技术,2020,39(2):235-240.  
ZHANG K, CHENG G, YAN W ZH. Evaluation of PDF optimal estimation of roundness error uncertainty [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, 39(2):235-240.
- [18] ZHANG K, CHENG G, ZHANG W. Evaluation of roundness error uncertainty by a Bayesian dynamic model [J]. Measurement,2020, 155:107565.
- [19] 张珂,张玮,阎卫增,等. 圆度误差的神经网络评定及测量不确定度研究[J]. 机械科学与技术,2019, 38(03):428-432.  
ZHANG K, ZHANG W, YAN W Z, et al. Evaluation and measurement uncertainty of roundness error by neural network [J]. Journal of Mechanical Science and Technology,2019,38(3):428-432.
- [20] 姜焰鸣. 多测点平面度误差智能评定与不确定度分析方法研究[D]. 广州:华南理工大学,2012.  
JIANG Y M. Research on many measurement points flatness error intelligent evaluation and uncertainty analytical method [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012.
- [21] 程银宝,陈晓怀,王汉斌,等. 基于精度理论的测量不确定度评定与分析[J]. 电子测量与仪器学报,2016, 30(8):1175-1182.  
CHENG Y B, CHEN X H, WANG H B, et al. Evaluation and analysis of measurement uncertainty based on accuracy theory [J]. Journal of Electronic

Measurement and Instrumentation, 2016, 30 ( 8 ): 1175-1182.

- [22] WEN X L, ZHAO Y B, WANG D X, et al. Adaptive Monte Carlo and GUM methods for the evaluation of measurement uncertainty of cylindricity error [ J ]. Precision Engineering, 2013, 37(4) :856-864.

作者简介



张珂, 1989 年于河南科技大学获学士学位, 1999 年于西安交通大学获硕士学位, 2005 年于东华大学获博士学位, 现为上海应用技术大学教授, 主要研究方向为机械精密测量、机械设计等。

E-mail: zkwy2004@ 126. com

**Zhang Ke** received his B. Sc. degree from Henan University

of Science and Technology in 1989, M. Sc. degree from Xi'an Jiaotong University in 1999, Ph. D. degree from Donghua University in 2005. Now he is a professor at Shanghai Institute of Technology. His main research interests include precision measurement and mechanical design.



张玮, 2016 年于淮海工学院获学士学位, 现为上海应用技术大学硕士研究生, 主要研究方向为精密测量。

E-mail: zwei934@ qq. com

**Zhang Wei** received her B. Sc. degree from Huaihai Institute of Technology in 2016.

Now she is a M. Sc. candidate at Shanghai Institute of Technology. Her main research interest is precision measurement.