

DOI: 10.13382/j.jemi.B2508730

基于分数阶累积量的加权双曲复合函数平滑 l_0 范数 DOA 估计方法

刘小松¹ 陈玥琦¹ 单泽彪^{1,2,3} 王安妮¹ 于艳鑫¹ 苏成志^{2,3}

(1. 长春理工大学电子信息工程学院 长春 130022; 2. 长春理工大学吉林省智能机器人高校协同创新中心 长春 130022; 3. 长春理工大学智能复合机器人吉林省校企联合技术创新实验室 长春 130022)

摘要:针对现有波达方向 (direction of arrival, DOA) 估计算法无法同时抑制 α 稳定分布噪声和高斯色噪声问题,提出了一种基于分数阶累积量和加权双曲复合函数的平滑 l_0 范数的 DOA 估计算法。首先,利用分数阶累积量的半不变性以及 α 稳定分布和高斯分布不敏感的特性,抑制 α 稳定分布和高斯色噪声。然后,将分数阶累积量矩阵进行向量化处理,并推导出基于分数阶累积量的稀疏 DOA 重构模型。最后,构造双曲复合函数对 l_0 范数进行平滑逼近,并通过调节逼近因子实现平滑性与陡峭性的自适应权衡。同时,引入加权矩阵,对真实信号源对应位置进行加权增强,其余位置权值被抑制,进一步突出稀疏解的结构特征。在此基础上,采用梯度下降与投影相结合的双层迭代策略求解加权平滑 l_0 优化问题,从而获得目标信号的 DOA 值。仿真实验结果表明,在 α 稳定分布与高斯色噪声混合且混合信噪比低至 0 的条件下,所提算法 DOA 估计的均方根误差为 0.5164° ,充分验证了其在复杂噪声背景下的有效性和高精度。

关键词:波达方向估计;分数阶累积量;双曲复合函数;平滑 l_0 范数

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4

Weighted hyperbolic composite function smoothing l_0 norm DOA estimation based on fractional order cumulants

Liu Xiaosong¹ Chen Yueqi¹ Shan Zebiao^{1,2,3} Wang Anni¹ Yu Yanxin¹ Su Chengzhi^{2,3}

(1. School of Electronic and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China; 2. Jilin Provincial Collaborative Innovation Center for Intelligent Robots, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China; 3. Jilin Provincial University Enterprise Joint Technological Innovation Laboratory for Intelligent Hybrid Robots, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

Abstract: To address the limitation of existing direction-of-arrival (DOA) estimation algorithms in simultaneously suppressing alpha-stable distribution noise and Gaussian colored noise, a DOA estimation method based on fractional-order cumulants and a weighted hyperbolic composite-function smoothed l_0 -norm is proposed. First, by exploiting the semi-invariant property of fractional-order cumulants and their insensitivity to both alpha-stable and Gaussian distributions, the adverse effects of alpha-stable noise and Gaussian colored noise are effectively suppressed. Then, the fractional-order cumulant matrix is vectorized, and a sparse DOA reconstruction model based on fractional-order cumulants is formulated. Subsequently, a hyperbolic composite function is constructed to provide a smooth approximation of the l_0 -norm, where the approximation parameter is adaptively adjusted to balance smoothness and steepness. Meanwhile, a weighting matrix is introduced to enhance the coefficients corresponding to the true source locations while suppressing the remaining entries, thereby further emphasizing the sparse structure of the solution. Based on this formulation, a two-layer iterative optimization strategy combining gradient descent and projection is employed to solve the weighted smoothed l_0 optimization problem, leading to accurate DOA estimation. The simulation results demonstrate that, even under conditions where the Alpha stable distribution is mixed with Gaussian colored noise and the mixed signal-to-noise ratio is as low as 0, the proposed algorithm achieves a root mean square error of 0.5164° in DOA estimation, fully illustrating its effectiveness and high accuracy in complex noise backgrounds.

收稿日期: 2025-09-07 Received Date: 2025-09-07

* 基金项目: 吉林省自然科学基金面上项目 (20250102050JC) 资助

Keywords: DOA estimation; fractional-order cumulants; hyperbolic composite function; smoothed l_0 -norm

0 引言

波达方向 (direction of arrival, DOA) 估计在雷达探测、无线通信以及水下声纳等诸多领域中起着至关重要的作用^[1-3]。在 DOA 估计研究中,多重信号分类算法^[4-5]与旋转不变子空间算法^[6-7]是较为常用的两类经典算法,其基本原理基于信号与噪声子空间的正交性,在小快拍数或噪声复杂条件下性能较差。为此,学者们将压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论^[8]应用到 DOA 估计中,提出了许多基于压缩感知的 DOA 估计算法^[9]。例如,文献[10]提出了正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) 的稀疏算法,实现了快速的 DOA 估计,但其原子选择依赖于残差与原子的正交性,受噪声干扰时易出现误选,算法可靠性较差。文献[11]提出平滑 l_0 范数 DOA 估计算法,但其平滑函数近似 l_0 范数的性能较差,算法精度不高。

此外,现实环境常常会表现出较为复杂的噪声特征,如海杂波是一种典型的附含冲击噪声及高斯噪声等混合噪声的自然环境噪声,其中冲击噪声可以用 α 稳定分布来表征,因此冲击噪声也称为 α 噪声。这些复杂的噪声会导致传统的 DOA 估计算法性能降低甚至失效。为此,文献[12]将高阶累积量 (high-order cumulant, HOC) 引入到 DOA 估计算法中,有效解决了高斯色噪声对接收信号的影响;文献[13]将相控分数低阶矩 (phased fractional lower-order moments, PFLOM) 与前向预测策略结合,有效提升了声矢量传感器阵列在冲击噪声下的离格 DOA 估计;文献[14]将分数阶统计量 (fractional lower-order statistics, FLOS) 与稀疏恢复理论结合,提出了基于 FLOS 稀疏表示的 DOA 估计算法,有效抑制了 α 噪声。然而, FLOS 算子对 α 噪声表现出一定的鲁棒性,但无法抑制高斯色噪声,而 HOC 可以处理高斯色噪声,但无法处理 α 噪声,这使得两者应用场景受限。

为了解决上述问题,本文将分数阶累积量 (fractional-order cumulant, FOC)^[15] 引入到 DOA 估计中,并证明了 FOC 不会破坏导向矢量结构。然后,构造加权矩阵和双曲复合函数,提出了基于 FOC 的加权双曲复合函数平滑 l_0 范数 (FOC-based smoothed l_0 -norm algorithm with weighted hyperbolic composite function, FOC-WHSL0) 的 DOA 估计算法。首先,通过计算接收数据的 FOC 矩阵,利用 FOC 的半不变性以及 α 稳定分布和高斯分布噪声不敏感的特性,对混合噪声进行抑制。其次,根据 FOC 矩阵构造稀疏 DOA 模型,将 DOA 估计问题转换为稀疏信号恢复问题。同时,为了进一步提高算法精度,构造加

权矩阵和双曲复合函数去近似稀疏解的 l_0 范数,并通过梯度下降法求解加权双曲复合函数优化问题,最终获得 DOA 估计值。通过仿真实验与实测噪声数据验证了所提算法的有效性和可行性。

1 信号与噪声模型

1.1 接收信号模型

假设一个阵元间距 $d = \lambda/2$ 的均匀线阵列,其组成阵元数量为 M 个,空间远场窄带信号数量为 K 个,DOA 分别为 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 。阵列接收信号模型为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 为接收向量; $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 为导向矢量矩阵; $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 为信号向量; $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 为混合噪声; $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j2\pi d \sin \theta_k / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi (M-1) d \sin \theta_k / \lambda}]^T$ 为第 k 个信号源的导向向量,其中 λ 为信号波长; $(\cdot)^T$ 表示转置运算。

1.2 Alpha 噪声模型

假设 α 噪声服从对称 α 稳定 (stable alpha-stable, SaS) 分布,通常 SaS 分布使用特征函数进行表征,其表达式为:

$$\phi(t) = \exp\{j\delta t - \gamma |t|^\alpha\} \quad (2)$$

式中: $| \cdot |$ 表示模值, $\alpha \in (0, 2]$ 为特征指数,当 $\alpha = 2$ 时; SaS 分布就退化为高斯分布; $\gamma \in (0, \infty)$ 为分散系数; $\delta \in (-\infty, \infty)$ 为位置参数。

2 基于 FOC 和加权函数的稀疏 DOA 模型

2.1 FOC 抑制噪声的原理

设 $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_k]$ 为 k 维随机变量,其联合概率密度函数为 $p(y_1, \dots, y_k)$, 则其联合分数阶矩 (fractional order moment, FOM) 生成函数 Φ_b 和联合 FOC 生成函数 Ψ_b 可定义为:

$$\begin{aligned} \Phi_b(u_1, \dots, u_k) &= E[E_b(j^b y_1^b u_1^b) \cdots E_b(j^b y_k^b u_k^b)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, \dots, y_k) E_b(j^b y_1^b u_1^b) \cdots E_b(j^b y_k^b u_k^b) (dy_1)^b \cdots (dy_k)^b \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Psi_b(u_1, \dots, u_k) = \ln[\Phi_b(u_1, \dots, u_k)] \quad (4)$$

式中: $E_b(j^b y^b u^b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j y u)^{kb}}{\Gamma(kb + 1)}$ 为 Mittag-Leffler 函数; $b \in (0, 1]$ 为分数阶数; $E[\cdot]$ 表示数学期望; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

分别对式(3)和(4)求 kb 阶左 Caputo 型分数阶偏导,可得 kb 阶 FOM 和 FOC 定义为:

$$m^{kb} = \text{mom}^{kb}[y_1^b, \dots, y_k^b] = E[y_1^b, \dots, y_k^b] \triangleq j^{-kb} \frac{\partial^{kb} \Phi_b(u_1, \dots, u_k)}{\partial^b u_1 \dots \partial^b u_k} \Big|_{u_1=\dots=u_k=0} \quad (5)$$

$$c^{kb} = \text{cum}^{kb}[y_1^b, \dots, y_k^b] \triangleq j^{-kb} \frac{\partial^{kb} \Psi_b(u_1, \dots, u_k)}{\partial^b u_1 \dots \partial^b u_k} \Big|_{u_1=\dots=u_k=0} \quad (6)$$

式中: $\text{mom}^{kb}[\cdot]$ 表示 kb 阶 FOM; $\text{cum}^{kb}[\cdot]$ 表示 kb 阶 FOC。

由式(6)可知,FOC 是 HOC 的非整数阶次的推广,性质如下^[15]:

性质 1) 设 $\{a_i\}_{i=1}^k$ 是常数序列, $\{y_i\}_{i=1}^k$ 为随机变量, 则:

$$\text{cum}^{kb}[a_1 y_1^b, \dots, a_k y_k^b] = \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \text{cum}^{kb}[y_1^b, \dots, y_k^b] \quad (7)$$

性质 2) 变量的排列顺序不影响 FOC 的值,即:

$$\text{cum}^{kb}[y_1^b, y_2^b, \dots, y_k^b] = \text{cum}^{kb}[y_{i_1}^b, y_{i_2}^b, \dots, y_{i_k}^b] \quad (8)$$

式中: $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ 是 $(1, 2, \dots, k)$ 的一种排列。

性质 3) 若随机变量 $\{y_i\}_{i=1}^k$ 中存在一个非空子集独立于该子集的余集,则:

$$\text{cum}^{kb}[y_1^b, y_2^b, \dots, y_k^b] = 0 \quad (9)$$

性质 4) 若随机变量 $\{x_i\}_{i=1}^k$ 与 $\{y_i\}_{i=1}^k$ 统计独立,则两者和的 FOC 等于两者各自 FOC 的和,即:

$$\text{cum}^{kb}[(x_1 + y_1)^b, \dots, (x_k + y_k)^b] = \text{cum}^{kb}[x_1^b, \dots, x_k^b] + \text{cum}^{kb}[y_1^b, \dots, y_k^b] \quad (10)$$

该性质被称为半不变性。

性质 5) 若 λ 为任意常数且 $k > 1$, 则:

$$\text{cum}^{kb}[(y_1 + \lambda)^b, y_2^b, \dots, y_k^b] = \text{cum}^{kb}[y_1^b, y_2^b, \dots, y_k^b] \quad (11)$$

性质 6) 设 $\{y_i\}_{i=1}^k$ 为一个服从 SaS 分布的随机变量,且特征函数 $\phi(t) = \exp\{j\delta t\} \exp\{-\gamma |t|^\alpha\} = \phi_\delta(t) \phi_\alpha(t)$, $m = \alpha - kb$, $c \in \mathbb{Z}^+$, 则 kb 阶 FOC 为:

$$c^{kb} = \begin{cases} 0, & kb \neq 1 \\ \delta, & kb = 1 \end{cases} + \underbrace{\begin{cases} 0, & 1 \leq -m \leq c \text{ and } m \in \mathbb{Z}, \\ & \text{or } m > 0 \text{ and } m \notin \mathbb{Z} \\ -j^{-kb} \gamma \Gamma(\alpha + 1), & m = 0 \\ \infty, & m < 0 \text{ and } m \notin \mathbb{Z} \end{cases}}_{\text{由 } \phi_\alpha(t) \text{ 确定}} \quad (12)$$

该性质表明,当 $kb \neq 1$ 且 $kb < \alpha$ 时,若 $y(t)$ 服从 SaS 分布,则 $\text{cum}^{kb}[y_1^b, \dots, y_k^b] = 0$ 。值得注意的是,该性质不受相关性影响。此外,由于当 $\alpha = 2$ 时, SaS 分布会退化为高斯分布,因此该性质对高斯分布也同样适用。

为证明 FOC 不会破坏导向矢量矩阵的结构、影响 DOA 估计结果,将阵列第 m 个阵元接收数据表示为:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K a_{mk} s_k(t) + n_m(t) \quad (13)$$

式中: a_{mk} 表示 $\mathbf{A}(\theta)$ 中第 (m, k) 个元素。进一步将复变量 x 改写为如式(14)所示。

$$x^{(b)} \triangleq \begin{cases} |x|^{b+1} x^*, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$|x|^{b+1} x^* = |x|^b \exp(j \arg(x)) = |x|^b \exp(j b \arg(x)) \exp(j(1-b) \arg(x)) = x^b \exp(j(1-b) \arg(x)) \quad (15)$$

式中: $(\cdot)^*$ 表示共轭; $\arg(\cdot)$ 表示求取相位角。

采用 $4b$ 阶累积量(即 $k = 4$)对接收数据进行处理。根据 FOC 的性质以及上述假设, $4b$ 阶累积量矩阵 $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{M^2 \times M^2}$ 的第 $[M(m_1 - 1) + m_2, M(m_3 - 1) + m_4]$ 元素 $z_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{4b}$ 定义为:

$$z_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{4b} = \text{cum}^{4b}[x_{m_1}^{(b)}(t), x_{m_2}^{*(b)}(t), x_{m_3}^{(b)}(t), x_{m_4}^{*(b)}(t)] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{n=1}^K \sum_{l=1}^K a_{m_1 i}^{(b)} \dots a_{m_4 l}^{*(b)} \text{cum}^{4b}[s_i^{(b)}(t), \dots, s_l^{*(b)}(t)] + \text{cum}^{4b}[n_{m_1}^{(b)}(t), \dots, n_{m_4}^{*(b)}(t)] \quad (16)$$

式中: $m_1, m_2, m_3, m_4 \in [1, M]$ 。由式(16)可知,由于 $\mathbf{A}(\theta)$ 中每个元素的模都为 1,则 $a_{mk}^{(b)} = a_{mk}$, 因此 FOC 并不会影响导向向量矩阵,只会对噪声和目标信号产生影响。由假设 3 和性质 6 可得,当 b 取值合理时, $\text{cum}^{4b}[n_{m_1}^{(b)}(t), \dots, n_{m_4}^{*(b)}(t)] = 0$ 。而由性质 3 可得,当且仅当 $i = j = n = l$ 时, $\text{cum}^{4b}[s_i^{(b)}, s_j^{*(b)}, s_n^{(b)}, s_l^{*(b)}] \neq 0$ 。

综上,FOC 不会破坏导向矢量矩阵进而影响 DOA 估计结果,并且在 b 取值符合性质 6 的条件时,可有效抑制 α 噪声和高斯色噪声。

2.2 基于 FOC 的稀疏 DOA 模型

通常 FOC 生成函数是未知的,无法通过式(16)直接利用定义获得 $z_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{4b}$ 。此时,可以将 FOC 转换为 FOM,并利用数学期望的估计方法获得 $z_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{4b}$,其表达式为:

$$z_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{4b} = \text{cum}^{4b}[x_{m_1}^{(b)}, x_{m_2}^{*(b)}, x_{m_3}^{(b)}, x_{m_4}^{*(b)}] = E[x_{m_1}^{(b)}, x_{m_2}^{*(b)}, x_{m_3}^{(b)}, x_{m_4}^{*(b)}] - E[x_{m_1}^{(b)}, x_{m_2}^{*(b)}] E[x_{m_3}^{(b)}, x_{m_4}^{*(b)}] - E[x_{m_1}^{(b)}, x_{m_3}^{(b)}] E[x_{m_2}^{*(b)}, x_{m_4}^{*(b)}] - E[x_{m_1}^{(b)}, x_{m_4}^{*(b)}] E[x_{m_2}^{*(b)}, x_{m_3}^{(b)}] \quad (17)$$

由于 $m_1, m_2, m_3, m_4 \in [1, M]$, 通过式(17)可得到 M^4 个 FOC 值,按照 $[M(m_1 - 1) + m_2, M(m_3 - 1) + m_4]$ 的排列方式组成矩阵 $\mathbf{Z}$ 。当 b 的取值符合性质 6 的条件时,根据 Khatri-Rao 积的性质, $\mathbf{Z}$ 可以表示为:

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{A}(\theta) \odot \mathbf{A}^*(\theta)] \mathbf{Z}_s^{4b} [\mathbf{A}(\theta) \odot \mathbf{A}^*(\theta)]^H = \boldsymbol{\Omega}(\theta) \mathbf{Z}_s^{4b} \boldsymbol{\Omega}^H(\theta) \quad (18)$$

式中: $\boldsymbol{\Omega}(\theta) \in \mathbb{C}^{M^2 \times K}$ 为阵列扩展后导向矢量矩阵; $(\cdot)^H$ 表示共轭转置; $\odot$ 表示 Khatri-Rao 积; $\mathbf{Z}_s^{4b} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K) \in \mathbb{C}^{K \times K}$ 为信号源的 $4b$ 阶累积量矩阵。

对式(18)应用向量化算子,可得重构接收数据向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ 为:

$$\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \text{vec}(\mathbf{Z}) = \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \boldsymbol{\lambda} \quad (19)$$

式中: $\text{vec}(\cdot)$ 为向量化算子; $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K]^T$ 是由信号源的 $4b$ 阶 FOC 值构成的列向量; $\tilde{\mathbf{B}}(\theta) \in \mathbb{C}^{M^4 \times K}$ 为重导向矢量矩阵,其表达式为

$$\tilde{\mathbf{B}}(\theta) = \boldsymbol{\Omega}(\theta) \odot \boldsymbol{\Omega}^*(\theta) \quad (20)$$

值得注意的是,式(19)和(1)有着类似的结构,可以视为无噪声的单快拍 DOA 模型。

将式(19)稀疏化,并构造基于 FOC 的稀疏 DOA 模型。首先将角度范围 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 等分为 $Q(Q \gg K)$ 份获得网格 $\{\tilde{\theta}_q\}_{q=1}^Q$ 。根据划分的网格定义稀疏字典 $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) \in \mathbb{C}^{M^4 \times Q}$ 和稀疏信号向量 $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$ 为:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) = [\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\theta}_1), \tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\theta}_2), \dots, \tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\theta}_Q)] \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_Q]^T \quad (22)$$

式中: $\tilde{\mathbf{s}}$ 仅有 K 个非零元素,若第 q 个非零元素 $\tilde{s}_q = \lambda_k$, 则 $\tilde{s}_q$ 对应的角度 $\tilde{\theta}_q = \theta_k$ 。根据式(21)、(22)定义可得,式(19)的稀疏形式为:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{s}} \quad (23)$$

由于式(23)是欠定的,无法直接求解,故将式(23)转化为如式(24)所示形式。通过对式(24)进行求解便可获得 DOA 估计值。

$$\min \|\tilde{\mathbf{s}}\|_0 \text{ s.t. } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{s}} \quad (24)$$

式中: $\|\cdot\|_0$ 表示 l_0 范数。

2.3 加权双曲复合函数

平滑 l_0 范数的核心是构造合适的函数对 l_0 范数进行逼近,本文提出的加权双曲复合函数,能够通过参数 σ 的调节实现不同程度的平滑性与陡峭性,故有更强的近似能力。双曲复合函数定义为:

$$f_\sigma(\tilde{s}_i) = \frac{2}{e^{-|\tilde{s}_i|^{0.5/\sigma^2}} + 1} - 1 \quad (25)$$

式中: σ 为逼近因子。如果 σ 越大,则式(25)越平滑,局部极值就越少,避免陷入局部最小值;如果 σ 越小,则式(25)越陡峭,对 l_0 范数的近似效果越好。当 σ 趋近于

0 时, $f_\sigma(\tilde{s}_i)$ 满足:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(\tilde{s}_i) = \begin{cases} 1, & s_i \neq 0 \\ 0, & s_i = 0 \end{cases} \quad (26)$$

对于任意的 $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^Q$, 令 $F_\sigma(\tilde{\mathbf{s}}) = \sum_{i=1}^Q f_\sigma(\tilde{s}_i)$, 可得 $\|\tilde{\mathbf{s}}\|_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\tilde{\mathbf{s}})$, 则式(24)所示模型可转换为:

$$\min_{\tilde{\mathbf{s}}} F_\sigma(\tilde{\mathbf{s}}) \text{ s.t. } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{s}} \quad (27)$$

为了进一步提高 l_0 范数的近似效果,本文构造了一种加权矩阵,以增强稀疏解,其定义为:

$$\mathbf{w} = \mathbf{1} - \{[\boldsymbol{\Omega}^H(\tilde{\theta}) \mathbf{U}_n]_{l_2} / \max([\boldsymbol{\Omega}^H(\tilde{\theta}) \mathbf{U}_n]_{l_2})\} \quad (28)$$

式中: $\mathbf{U}_n$ 为矩阵 $\mathbf{Z}$ 奇异值分解得到的噪声子空间; $[\cdot]_{l_2}$ 表示按行求 l_2 范数。根据子空间定理可知,当 $\tilde{\theta}_q$ 为真实 DOA 时, $[\boldsymbol{\Omega}^H(\tilde{\theta}_q) \mathbf{U}_n]_{l_2} \rightarrow 0$ 且 $w_q \rightarrow 1$, 否则 $0 \leq w_q < 1$ 。因此,稀疏解 $\tilde{\mathbf{s}}$ 中信号源对应位置的权值近似为 1,而其余部分权值小于 1,稀疏性得以加强。利用构造的加权矩阵,可知:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} l_\sigma(w_i, \tilde{s}_i) = \begin{cases} 1, & w_i = 0, s_i \neq 0 \\ 0, & w_i = 1, s_i = 0 \end{cases} \quad (29)$$

并且式(27)所示模型可转换为:

$$\min_{\tilde{\mathbf{s}}} \mathbf{w} \cdot F_\sigma(\tilde{\mathbf{s}}) \text{ s.t. } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{s}} \quad (30)$$

对于式(30),本文采用梯度下降法求解。所构建的双曲复合函数的一阶导数具体形式为:

$$\frac{\partial f_\sigma(\tilde{s}_q)}{\partial \tilde{s}_q} = \frac{\exp(-|\tilde{s}_q|^{0.5/\sigma^2})}{\sigma^4 |\tilde{s}_q| \times (\exp(-|\tilde{s}_q|^{0.5/\sigma^2}) + 1)^2} \quad (31)$$

由此,可以得到其加权梯度 $\nabla F(\tilde{\mathbf{s}})$ 表达式为:

$$\nabla F(\tilde{\mathbf{s}}) = \left[w_1 \frac{\partial f_\sigma(\tilde{s}_1)}{\partial \tilde{s}_1}, \dots, w_Q \frac{\partial f_\sigma(\tilde{s}_Q)}{\partial \tilde{s}_Q} \right] \quad (32)$$

进而可以推导出迭代更新公式为:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{s}} - m \times \nabla F(\tilde{\mathbf{s}}) \quad (33)$$

式中: $m = m_0 \sigma^2$ 表示梯度下降的步长, m_0 为步长初值。将每次迭代的结果进行梯度投影,其投影方式为:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{s}} - \tilde{\mathbf{B}}^T (\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{s}} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (34)$$

综上,所提算法包括 2 个循环,外层由逼近因子 σ 控制,负责调整平滑函数平滑程度;内层循环进行梯度下降和投影。FOC-WHSLO 算法的伪码如下:

- 1) 输入: $\tilde{x}, \tilde{B}, K, m_0$, 循环次数 L , 衰减因子 β ;
- 2) 初始化: 算法初始解 $\tilde{s}_0 = \tilde{B}^T (\tilde{B} \tilde{B}^T)^{-1} \tilde{x}$; 逼近因子最小值 $\sigma_{\min}$; 逼近因子初值 $\sigma_0 = \max(|\tilde{s}|)$; $i = 1$;
- 3) $l = 1$, 通过梯度下降方法, 迭代 L 步以此对加权函数 $wF_\sigma(\tilde{s})$ 进行优化, 获取最小值:
 - (1) 计算权值:

$$w = 1 - \{ [\mathbf{Q}^H(\tilde{\theta}) \mathbf{U}_n]_{l_2} / \max([\mathbf{Q}^H(\tilde{\theta}) \mathbf{U}_n]_{l_2}) \};$$
 - (2) 更新 $wF_\sigma(\tilde{s})$ 的梯度:

$$\nabla F(\tilde{s}) = \left[w_1 \frac{\partial f_\sigma(\tilde{s}_1)}{\partial \tilde{s}_1}, \dots, w_Q \frac{\partial f_\sigma(\tilde{s}_Q)}{\partial \tilde{s}_Q} \right];$$
 - (3) $\tilde{s} \leftarrow \tilde{s} - m \times \nabla F(\tilde{s})$;
 - (4) 更新梯度投影:

$$\tilde{s} = \tilde{s} - \tilde{B}^T (\tilde{B} \tilde{B}^T)^{-1} (\tilde{B} \tilde{s} - \tilde{x});$$
 - (5) $l = l + 1$, 如果 $l < L$, 重复步骤 1)~4);
- 4) $i = i + 1, \sigma_{i+1} = \beta \sigma_i$, 重复步骤 3), 当满足 $\sigma_i < \sigma_{\min}$ 时结束循环;
- 5) 输出: 稀疏解 $\tilde{s}$ 。

3 仿真实验与结果分析

3.1 双曲复合函数近似效果实验

为了验证本文构造的双曲复合函数近似 l_0 范数的优势, 将其与反正切函数、分式函数和指数函数等平滑函数^[16-18]进行近似效果实验。图 1 为 4 种平滑函数在 $\sigma = 0.1$ 下的近似效果对比图。

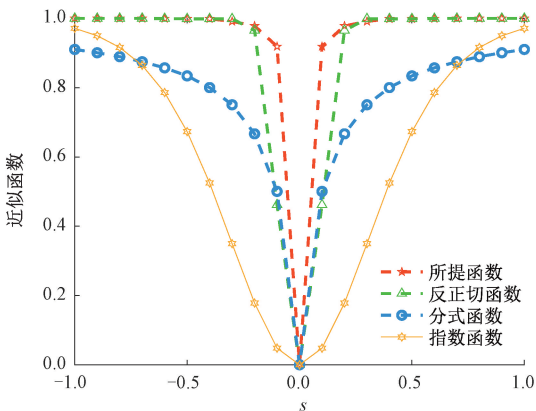


图 1 近似效果对比图

Fig. 1 Comparison of approximation results

由图 1 可知, 所构造的函数在 $s \neq 0$ 时, 函数值 $f(s)$ 都接近 1, 而另外 3 种平滑函数在 $s \neq 0$ 处, 函数值 $f(s)$ 均出现不同程度下降。这说明本文构造的双曲复合函数对 l_0 范数的近似效果更好。

3.2 模拟仿真实验

为了验证所提 FOC-WHSL0 算法的优越性, 在 Alpha 噪声与高斯色噪声等混合噪声下将所提算法与基于分数低阶矩的多重信号分类算法 (fractional lower order moment-based multiple signal classification, FLOM-MUSIC) 算法^[19]、重构正交匹配追踪 (reshaped orthogonal matching pursuit, R-OMP) 算法^[20] 以及高阶累积量正交匹配追踪 (higher-order cumulant orthogonal matching pursuit, HOC-OMP) 算法进行均方根误差 (root mean square error, RMSE) 实验。由于 Alpha 稳定分布的方差不收敛, 因此使用广义信噪比 (generalized signal-to-noise ratio, GSNR) 来衡量 α 噪声的强度, 其定义为:

$$\text{GSNR} = 10 \lg(\omega_s / \gamma) \quad (35)$$

式中: ω_s 表示信号的平均功率; γ 表示 α 稳定分布噪声分散系数。

仿真实验中, 所提算法、R-OMP 算法与 HOC-OMP 算法网格设置为 1° , FLOM-MUSIC 算法搜索步长为 0.1° , 阵元数 $M = 10$, 蒙特卡洛实验次数 $M_c = 100$, 信号源入射角度分别为 -35° 、 8° 以及 42° 。DOA 估计算法性能由均方根误差来表征, 其定义为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KM_c} \sum_{m=1}^{M_c} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{km} - \theta_k)^2} \quad (36)$$

式中: M_c 为实验总次数; $\hat{\theta}_{km}$ 为 DOA 估计值; θ_k 为 DOA 实际值。

实验 1) 重点验证所提算法在混合噪声环境下的有效性。对含 α 稳定分布与高斯色噪声的多信号源 DOA 估计进行测试, 由图 2 的结果可知 FOC-WHSL0 算法能够准确估计 3 个目标的角度信息, 验证了所提算法具有良好的估计能力;

实验 2) 在 α 噪声下, 研究不同广义信噪比条件对各算法性能的影响。 α 噪声广义信噪比 GSNR 从 -10 dB 增加到 10 dB, 高斯色噪声信噪比设为 5 dB。图 3 显示, FOC-WHSL0 算法在整体表现最佳。特别是当 $\text{GSNR} = -4$ dB 时, FOC-WHSL0 算法的均方根误差已小于 1° , 充分表明所提算法对不同程度的 Alpha 噪声均表现出良好的抑制能力;

实验 3) 在高斯色噪声下, 研究不同信噪比条件对各算法性能的影响。实验中, 高斯色噪声的信噪比从 -10 dB 增加到 10 dB; α 噪声广义信噪比设置为 5 dB。图 4 给出了不同算法的 RMSE 随 SNR 变化的对比曲线。由图 4 可知, 相较其他算法, FOC-WHSL0 算法具有较高

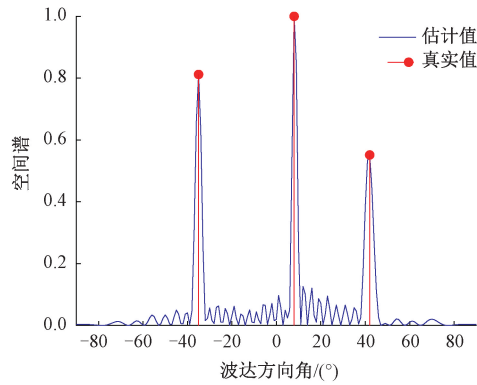


图2 三信源 DOA 估计结果
Fig.2 Estimated DOA of three sources

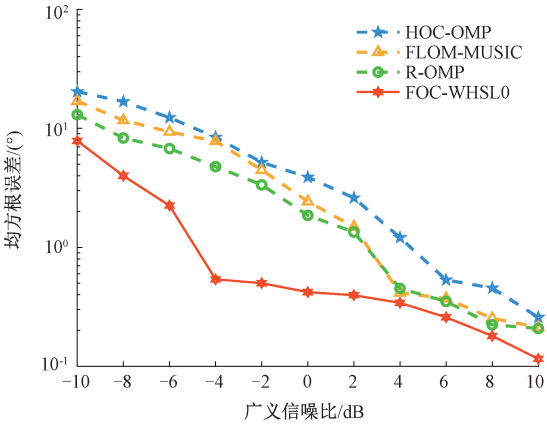


图3 广义信噪比与均方根误差的关系曲线
Fig.3 Characteristic curve of RMSE with respect to GSNR

的估计精度,表明其对不同程度的高斯色噪声,表现出良好的鲁棒性;

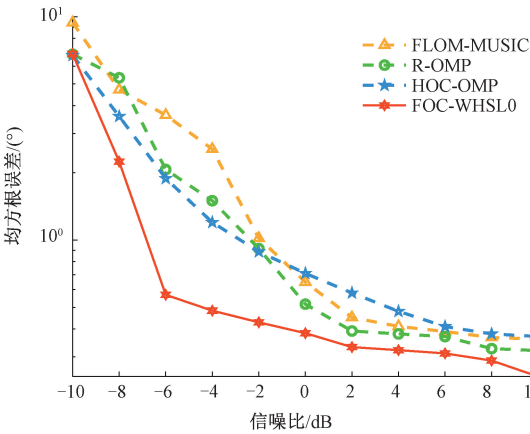


图4 信噪比与均方根误差的关系曲线
Fig.4 Characteristic curve of RMSE with respect to SNR

实验4)在Alpha噪声背景下,研究不同特征指数条

件对各算法性能的影响。实验条件为:特征指数 α 从 1.1 逐渐增加到 2。图5 为特征指数 α 与 RMSE 的关系曲线。

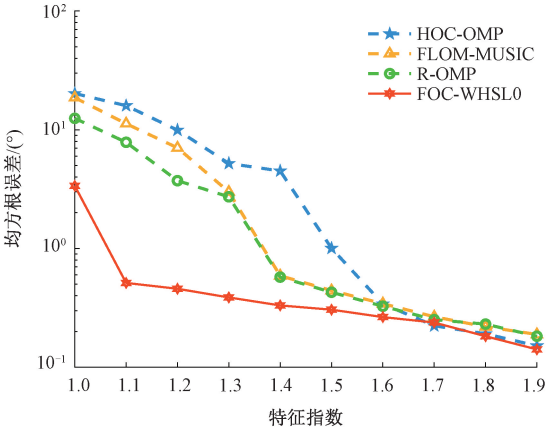


图5 特征指数与均方根误差的关系曲线
Fig.5 Characteristic curve of RMSE with respect to characteristic exponent

根据图5可知,随着 α 噪声冲击特性的减弱,各个算法的性能逐渐变好,其中当 $\alpha = 1.1$ 时,FOC-WHSL0 算法的 DOA 估计均方根误差小于 1° ,性能优于对比算法。 α 越小,Alpha 噪声冲击性越强,所提算法的优势越加明显,表明所提算法具有更好的冲击噪声抑制性能。当 $\alpha = 2$ 时, α 噪声退化为高斯噪声,由实验结果可知所提算法仍然有效;

实验5)混合噪声背景下,不同快拍数对各算法性能影响验证。实验条件为:快拍数从 50 增长到 500。图6 为快拍数与 RMSE 的关系曲线。从图6中可知,随着快拍数的增加,4 种算法的 RMSE 均逐渐降低。其中在快拍数为 50 时,所提算法的 RMSE 小于 1° ,相较另外 3 种算法具有更大的优势;

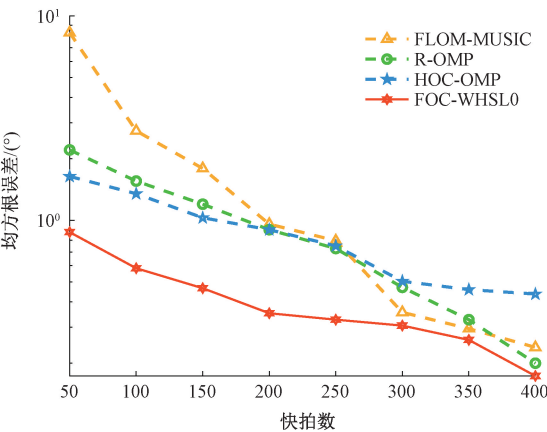


图6 快拍数与均方根误差的关系曲线
Fig.6 Characteristic curve of RMSE with respect to snapshots

实验 6) 混合噪声背景下, 不同阵元数对各算法性能影响验证。实验条件为: 阵元数从 4 增长到 12。图 7 为 RMSE 随阵元数的变化。从图 7 可知, 随着阵元数的增加, 4 种算法的 DOA 估计均方根误差均呈下降趋势。在较少阵元时, FOC-WHSL0 算法的 RMSE 明显低于其他 3 种算法, 表现出更强的稳健性和精度优势;

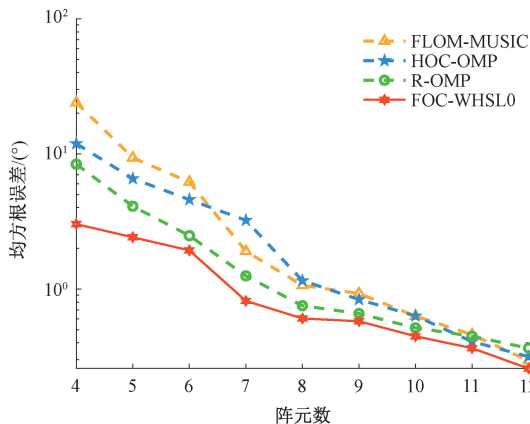


图 7 阵元数与均方根误差的关系曲线

Fig. 7 Characteristic curve of RMSE with respect to number of array elements

实验 7) 混合噪声信噪比变化下的算法性能对比验证。实验条件为: 在 α 噪声广义信噪比与高斯色噪声信噪比相等, 令总信噪比从 -10 dB 增加到 10 dB。图 8 为总信噪比与 RMSE 的关系曲线。

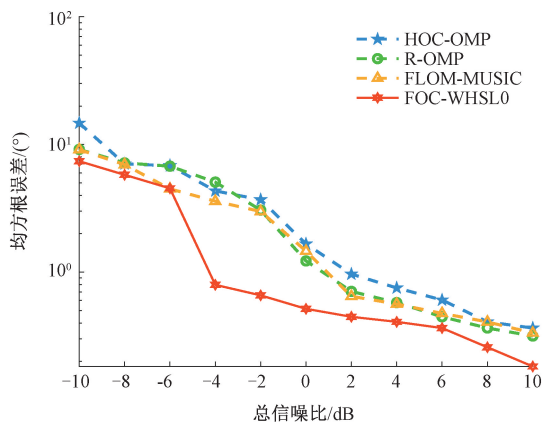


图 8 总信噪比与均方根误差的关系曲线

Fig. 8 Characteristic curve of RMSE with respect to total SNR

根据 8 可知, 在不同信噪比条件下, 所提算法的均方根误差均是最小的。当总信噪比为 0 时, HOC-OMP 算法、R-OMP 算法及 FLOM-MUSIC 算法的均方根误差分别为 1.6633° 、 1.2247° 和 1.4635° , 而所提 FOC-WHSL0 算法的均方根误差为 0.5164° , 明显小于另外 3 种算法。所提算法在无噪声条件下的估计精度与对比算法在 6 dB

时的估计精度相当, 表明所提算法可以实现对混合噪声的有效抑制, 抑制能力提升优于 6 dB, 且相对对比算法, 所提算法目标检测所需的信噪比要求降低了 5 dB 以上, 与现有 MUSIC 等空间谱算法相比, 参数估计精度提升了 57.83% 以上。综上, 所提算法对 α 噪声和高斯色噪声均具备良好的鲁棒性, 在二者混合环境下仍能实现较高精度的 DOA 估计。

3.3 实测噪声数据验证实验

为了进一步验证所提算法的实用性, 使用 IPIX 雷达噪声数据集对所研究算法进行 DOA 估计验证, 即背景噪声选取加拿大 McMaster 大学利用 IPIX 雷达在加拿大 Dartmouth 海岸面对大西洋海面实际采集得到的数据。海杂波是一种典型的富含 α 稳定分布噪声等混合噪声的自然环境噪声, 海洋雷达目标定位的主要问题之一就是对海杂波进行抑制。实验中目标选取为 3 个, 目标角度即波达方向角分别设置为 -35° 、 10° 和 40° , 利用所提算法进行 100 次蒙特卡罗独立实验, 得到一次典型的 DOA 估计散点图如图 9 所示。

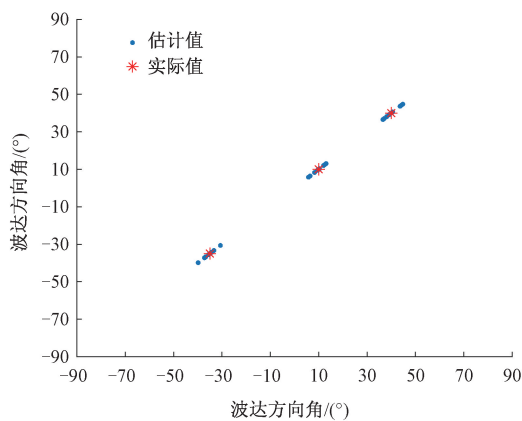


图 9 DOA 估计散点图

Fig. 9 Scatter plot of DOA estimation

观察图 9 可知, 在实测海杂波噪声环境下, 所提算法仍可以对目标波达方向进行有效的估计, 其中 3 个信源 DOA 估计的均方根误差分别为 2.47° 、 2.33° 和 3.30° , 基本达到了测试的要求, 验证了所提算法的有效性和实用性。

4 结 论

针对现有 DOA 估计算法无法同时抑制 α 稳定分布噪声和高斯色噪声的问题, 提出了一种基于 FOC-WHSL0 的 DOA 估计算法。所提算法首先利用 FOC 实现了对 α 噪声和高斯色噪声的有效抑制, 并建立了基于 FOC 的稀疏 DOA 模型。随后构造加权双曲复合函

数去近似稀疏解的 l_0 范数,提高了重构精度。仿真实验结果表明,在 α 稳定分布与高斯色噪声混合且混合信噪比低至 0 的条件下,所提算法 DOA 估计的均方根误差为 0.5164° ,充分说明了其在复杂噪声背景下的有效性和高精度。虽然将所提算法在实测海杂波噪声数据下进行了有效性及实用性验证,但所研究内容还可以进一步优化及改进,一是进一步降低所提算法的计算复杂度,以适应实时测量的要求;二是搭建实测系统进行在线目标定位研究。

参考文献

- [1] 单泽彪,姚瑞广,刘小松,等. 一种抗冲击噪声的高精度波达方向估计算法[J]. 西安交通大学学报, 2025, 59(4): 193-202.
SHAN Z B, YAO R G, LIU X S, et al. A high-accuracy direction-of-arrival estimation algorithm robust to impulsive noise [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2025, 59(4): 193-202.
- [2] 王安妮,单泽彪,刘小松,等. 基于互质阵的分数阶累积量与虚拟插值 DOA 估计[J/OL]. 电子测量与仪器学报, 1-8 [2025-12-25]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2488.tn.20251224.1625.072>.
WANG AN N, SHAN Z B, LIU X S, et al. DOA estimation based on fractional-order cumulants and virtual interpolation using coprime arrays [J/OL]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 1-8 [2025-12-25]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2488.tn.20251224.1625.072>.
- [3] 陈果,卢永刚. 宽带声源方位估计的多频稀疏贝叶斯学习改进算法[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(5): 302-312.
CHEN G, LU Y G. An improved multi-frequency sparse Bayesian learning algorithm for wideband acoustic source direction-of-arrival estimation [J]. Journal of Instrumentation and Measurement, 2023, 44(5): 302-312.
- [4] MENG X T, CAO B X, YAN F G, et al. Real-valued MUSIC for efficient direction of arrival estimation with arbitrary arrays: Mirror suppression and resolution improvement [J]. Signal Processing, 2023, 202:108766.
- [5] 郝崇宇,施伟,王保卫. 基于单辅助源校正的 MUSIC 测向性能分析与实验验证[J]. 电子测量技术, 2022, 45(18): 167-172.
HAO CH Y, SHI W, WANG B W. Performance analysis and experimental verification of MUSIC direction finding

- based on single auxiliary source calibration [J]. Electronic Measurement Technology, 2022, 45(18): 167-172.
- [6] AHMED T, ZHANG X, HASSAN U W. A higher-order propagator method for 2D-DOA estimation in massive MIMO systems [J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(3): 543-547.
- [7] PAN J J, SUN M, WANG Y D, et al. An enhanced spatial smoothing technique with ESPRIT algorithm for direction of arrival estimation in coherent scenarios[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 3635-3643.
- [8] LAL B, GRAVINA R, SPAGNOLO F, et al. Compressed sensing approach for physiological signals: A review [J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(6): 5513-5534.
- [9] 单泽彪,薛泓垚,刘小松,等. Alpha 稳定分布噪声下基于近似 l_0 范数稀疏重构的 DOA 估计[J]. 吉林大学学报(工学版), 2025, 55(3): 1093-1102.
SHAN Z B, XUE H Y, LIU X S, et al. DOA estimation based on approximate l_0 -norm sparse reconstruction under alpha-stable noise [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2025, 55(3): 1093-1102.
- [10] WANG W Y, WU R B. High resolution direction of Arrival (DOA) estimation based on improved orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm by iterative local searching[J]. Sensors, 2013, 13(9): 11167-11183.
- [11] WOONG J P, JOONHO L, WOORYOUNG H. An enhanced smoothed l_0 -norm direction of arrival estimation method using covariance matrix [J]. Sensors, 2021, 21(13): 4403-4403.
- [12] XING CH X, WAN ZH L, JIANG S Y, et al. Direction of arrival estimation based on high-order cumulant by spare reconstruction of underwater acoustics signals[J]. Acta Acustica, 2022, 47(4): 440-450.
- [13] SHAN Z B, YAO R G, LIU X S, et al. Off-grid DOA estimation of acoustic vector sensor array based on look ahead strategy in impulsive noise [J]. International Journal of Communication Systems, 2025, 38(4): 1-11.
- [14] LI S, HE R X, LIN B, et al. DOA estimation based on sparse representation of the fractional lower order statistics in impulsive noise[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(4): 860-868.
- [15] SHI Y R, YU D L, SHI H Y, et al. A new concept of

- fractional order cumulant and it-based signal processing in α and/or Gaussian noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 67(3): 1849-1863.
- [16] JIN D F, YANG G, LI Z R, et al. Sparse recovery algorithm for compressed sensing using smoothed l_0 norm and randomized coordinate descent [J]. Mathematics, 2019, 7(9): 834.
- [17] LI H Y, Zhang Q, CUI A G, et al. Minimization of fraction function penalty in compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 31(5): 1626-1637.
- [18] MOHIMANI H, MASSOUD B Z, JUTTEN C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed l_0 norm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 57(1): 289-301.
- [19] LIU T H, MENDEL J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. IEEE Transactions on Signal Processing: A publication of the IEEE Signal Processing Society, 2001, 49(8): 1605-1613.
- [20] LIANG L K, SHI Y R. Direction of arrival estimation with off-grid target based on sparse reconstruction in impulsive noise [J]. Journal of Low Frequency Noise

Vibration and Active Control, 2020, 40(1): 315-331.

作者简介



刘小松, 2016 年于吉林大学获得博士学位, 现为长春理工大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为信息感知与先进控制技术、复杂系统建模、仿真与控制。

E-mail: liuxs@cust.edu.cn

Liu Xiaosong received her Ph. D. degree from Jilin University in 2016. Now she is an associate professor and M. Sc. supervisor at Changchun University of Science and Technology. Her main research interests include information perception and advanced control technology, modeling, simulation and control of complex systems.



单泽彪 (通信作者), 2016 年于吉林大学获得博士学位, 现为长春理工大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为弱信号检测、阵列信号处理以及压缩感知技术。

E-mail: zbshan@cust.edu.cn

Shan Zebiao (Corresponding author) received his Ph. D degree from Jilin University in 2016. Now he is an associate professor and M. Sc. supervisor at Changchun University of Science and Technology. His main research interests include weak signal detection, array signal processing and compressed sensing technology.