

DOI: 10.13382/j.jemi.B2306819

电子战中基于互信息准则的双鲁棒波形设计*

辛凤鸣 罗 晨 张晨雪 张明峰

(东北大学秦皇岛分校计算机与通信工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要:电子战环境中,针对雷达和干扰机的性能会因为对战场博弈环境的不了解以及频谱信息的不精确估计而受到影响,研究了雷达发射波形和干扰波形的能量分配问题,雷达和干扰机在对抗过程中可以通过优化自身发射波形获得更好的性能。在现实中,由于雷达无法获得精准的目标频谱和干扰频谱,并且干扰机也无法获得精准的目标频谱和雷达发射信号频谱,分别以雷达和干扰机为领导者,建立层次博弈模型,提出一种双鲁棒波形设计方法,该方法以互信息为准则,在能量约束下建立双鲁棒发射波形的优化模型,利用拉格朗日乘子法分别求解双鲁棒雷达发射波形和双鲁棒干扰波形。仿真结果表明,在最坏情况下,该方法可以提高雷达参数估计性能和干扰机性能。

关键词: 雷达波形; 干扰波形; 双鲁棒; 层次博弈

中图分类号: TN974 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.70

Double robust waveform design based on MI criterion in electronic warfare

Xin Fengming Luo Chen Zhang Chenxue Zhang Mingfeng

(School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In the electronic warfare environment, the performance of radar and jammer will be affected by the lack of understanding of the battlefield game environment and the inaccurate estimation of spectrum information. This paper studied the energy allocation problem of radar transmission waveform and jamming waveform, and radar and jammer can obtain better performance by optimizing their own transmission waveform in the process of confrontation. In reality, because the radar cannot obtain accurate target spectrum and jamming spectrum, and the jammer cannot obtain accurate target spectrum and radar transmitted signal spectrum, the radar and jammer are taken as leaders respectively, a hierarchical game model is established, and a double robust waveform design method is proposed. The optimization model of dual robust transmit waveform is established under the energy constraint, and the dual robust radar transmit waveform and dual robust jamming waveform are solved by Lagrange multiplier method. Simulation results show that the proposed method can improve the radar parameter estimation performance and jammer performance in the worst case.

Keywords: radar waveform; interference waveform; double robust; hierarchical game

0 引 言

在现代电子战中,随着雷达和干扰机的智能化,传统的电子对抗(electronic countermeasures, ECM)和电子反对抗(electronic counter-countermeasures, ECCM)技术面临着更大的挑战,雷达干扰与反干扰是掌握战场信息的重要手段,二者的相互作用一直是研究热点^[1-2]。认知雷达

(cognitive radar, CR)受到蝙蝠回声定位的启发,打破了传统雷达的开环收发模式,引入了一种闭环系统,通过学习目标和环境信息来优化发射波形^[3-7],但实际环境中数据的统计特性往往难以精确获得,为了解决不确定性问题,导致了鲁棒估计理论的产生和发展,所以发射波形的鲁棒性能至关重要。

熵的概念来源于热力学,在天线领域得到了广泛的应用^[8]。基于熵的互信息也被应用于认知雷达的波形设

计中。文献[9]通过最大化接收信号与目标脉冲响应之间的互信息 (mutual information, MI) 提高雷达系统的目标识别能力。文献[10]致力于研究不同环境条件下 MI 最大化的波形设计方法。文献[11]表明雷达接收机中匹配滤波器的输出信干噪比 (signal to interference plus noise ratio, SINR) 可以作为提升雷达探测性能的波形优化准则。在文献[12]中,研究了基于 MI 准则的匹配波形设计,分析了 MI 与 SINR 之间的关系。西安电子科技大学提出一种基于双互信息的联合优化雷达波形的设计方法,通过预设加权融合值,将不同准则的雷达发射波形能量谱进行加权融合^[13]。文献[14]提出一种基于双互信息优化准则的雷达波形优化方法,相比较固定波形,能够提高目标检测性能。针对色噪声中的多输入多输出 (multiple input multiple output, MIMO) 雷达,唐波等人提出采用 MI 和相对熵两种信息论度量作为发射功率约束下波形最优设计标准^[15]。文献[16]提出一种相控阵 MIMO 雷达子阵数目估计方法。文献[17]针对雷达与通信一体化系统,提出了一种基于低截获概率 (low probability of intercept, LPI) 的最优正交频分复用 (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) 调制波形设计策略。文献[18]针对暗室中所需要的复杂电磁环境,提出一种具有天线扫描特性的雷达发射信号产生算法。近年来,雷达干扰技术得到了很大的发展^[19-21]。文献[21]研究了基于 MI 和 SINR 的智能干扰机波形设计。文献[22]研究了合成孔径雷达的干扰技术。为了降低分布式雷达干扰波形被拦截的概率,Shi 等^[23]提出了一种自适应干扰波形设计方法。文献[24]将强化学习算法与“切割”假设法相结合,对未知长度的雷达信号进行“切割”处理以达到最佳干扰。针对 MIMO 雷达,文献[25]研究了基于最小均方误差 (minimum mean squared error, MMSE) 和 MI 的干扰功率分配策略。同时雷达抗干扰技术也受到广泛关注。文献[26]通过一种改进可变加权卡尔曼滤波算法提高了回波信号的信噪比。文献[27]提出了一种基于波形水印的干扰抑制方法。文献[28]提出一种基于时频变换和边缘检测的干扰抑制算法,能够有效地抑制脉冲体制雷达辐射源信号干扰。为抑制杂波和对抗干扰,文献[29-30]分别基于 MI 准则和 MMSE 准则设计了一种弹载雷达的波形优化方法,可有效提高目标估计精确度。发射波形和接收滤波器的联合优化提高了雷达的抗干扰性能^[31-32]。文献[33-35]为提高雷达检测性能,分别基于 Bayesian 博弈模型,Stackelberg 博弈模型和纳什均衡设计雷达波形。为改善雷达的检测性能受限于参数估计精度和发射脉冲积累的情况,文献[36]提出一种基于双阶段互信息准则的波形设计策略。文献[37]将 3 种不同情况下的鲁棒雷达发射波形的功率最小化。文献[38]基于 SINR 和 MI 建立了

优化模型,在优化问题中选择目标频谱不确定范围的下界保证雷达最不利情况下的性能。虽然针对目标功率谱密度 (power spectral density, PSD) 的鲁棒雷达发射波形已经得到了广泛的研究。但需要注意的是,雷达发射波形和干扰波形的频谱精准估计也很困难。

以上研究中均假设信号频谱是准确的,或者只考虑单一信号频谱无法准确获得时,优化雷达或者干扰机的发射波形。然而在现实环境中,目标频谱、雷达发射信号频谱和干扰机发射信号频谱均无法准确获得^[38-40],针对此问题,本文在雷达与干扰机之间频谱信息不确定情况下的对抗展开研究,提出一种基于互信息准则的雷达和干扰机的双鲁棒波形设计方法。在设计雷达发射波形时,考虑到目标频谱和干扰频谱的不确定性,在设计干扰波形时,考虑到目标频谱和雷达频谱的不确定性,将雷达和干扰机的对抗建立为层次博弈模型,分析了雷达和干扰机分别为领导者的情况。首先在频谱信息精准获得的条件下,给出了基于 MI 准则的最优雷达发射波形和最优干扰波形设计方法。其次,针对目标频谱、雷达频谱、干扰频谱同时处于相应不确定性范围的情况,提出一种在层次博弈模型下基于 MI 的双鲁棒波形设计方法,利用拉格朗日乘子法对建立的双鲁棒优化模型进行求解,得到了双鲁棒雷达发射波形和双鲁棒干扰波形。他们分别优化了雷达和干扰机最不利条件下的性能,可以应用到雷达和干扰机分别为领导者的战场博弈环境中,最大限度地提高雷达的参数估计性能和干扰机的干扰性能,对波形能量分配提供了有用的指导,为领导者提供了最有利的策略。

1 信号模型和问题建模描述

如图 1 所示,考虑了包括雷达、干扰机和目标的共存场景^[21],假设雷达已知干扰机存在时,根据当前获得的场景信息,优化发射波形对目标进行检测,而干扰机在截获雷达发射信号后,根据雷达信号特征,制定相应的干扰信号完成干扰任务。雷达与干扰机时刻处于博弈状态。

随机目标模型和信号模型如图 2 所示^[4],其中图 2(a)说明了随机目标的持续时间是有限的,在此模型中, $a(t)$ 表示持续时间为 T_g 的矩形窗口函数, $h(t)$ 表示广义平稳随机过程,因此 $g(t) = a(t)h(t)$ 表示一个仅在 $[0, T_g]$ 内有意义的局部平稳随机过程。图 2(b)描述了基于 MI 设计的发射波形的信号模型,其中 $w(t)$ 表示发射信号, $g(t)$ 表示有限持续时间的目标冲激响应, $w(t)$ 和 $g(t)$ 的频谱响应分别为 $W(f)$ 和 $G(f)$ 。 $c(t)$ 是零均值复高斯随机过程,用来描述干扰机的系统函数^[19],干扰机的输入端是截获的雷达发射信号 $w(t)$,通过系统函数 $c(t)$ 得到输出的干扰信号 $j(t) =$

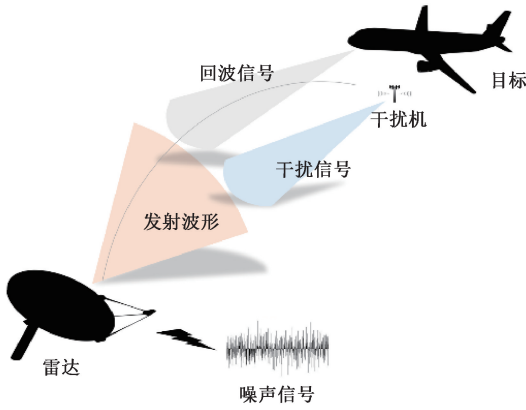


图 1 雷达与干扰机分层博弈模型

Fig. 1 Hierarchical game model of radar and jammer

$w(t) * c(t)$, $c(t)$ 的特性可以用功率谱密度 $S_{cc}(f)$ 来描述,通过求解最优的干扰机系统函数的 PSD 可以得到干扰机系统的一些特性从而削弱雷达性能。 $n(t)$ 是零均值的复高斯随机信道噪声,其 PSD 为 $S_{nn}(f)$ 。 $y(t)$ 表示接收机滤波器的脉冲响应。 $g(t)$ 的能量谱方差 (ESV) 表示如下^[4]:

$$\sigma_c^2(f) = E[|G(f) - \mu_c(f)|^2] \quad (1)$$

式中: $E[\cdot]$ 为输入的期望值, $\mu_c(f)$ 为 $G(f)$ 的平均值, 假设为 0。因此, 目标 ESV 为 $\sigma_c^2(f) = |G(f)|^2$ 。

雷达目标回波信号的表达式可以表示为:

$$r(t) = w(t) * g(t) + w(t) * c(t) + n(t) \quad (2)$$

其中, $*$ 是卷积符号, 雷达接收信号与目标冲激响应之间的 MI 表达式可表示为:

$$MI = T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{|W(f)|^2 \sigma_c^2(f)}{T_r (S_{nn}(f) + |W(f)|^2 S_{cc}(f))} \right] df \quad (3)$$

其中, 雷达发射波形和干扰波形的能量约束设为 E_w , 雷达目标回波 $r(t)$ 的持续时间为 T_r 。

为了提高雷达系统的性能, 可以设计雷达发射波形 $|W(f)|^2$ 使 MI 最大化作为优化准则。MI 由干扰 PSD、噪声 PSD、目标 ESV 以及雷达发射波形频谱表示。设计的最优雷达发射波形应满足:

$$\max_{|W(f)|^2} MI(|W(f)|^2) \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \int_{BW} |W(f)|^2 df \leq E_w \quad (5)$$

约束条件(5)中, BW 是雷达发射波形和干扰波形的频谱响应被限制的带宽。MI 可以表征雷达目标回波中所携带的目标信息, 最大化 MI 可使雷达发射机的性能提升。利用拉格朗日乘子法获得的在能量约束下使 MI 最大化的最优发射波形如下:

$$|W(f)|^2 = \max[0, C(f)(A - K(f))] \quad (6)$$

其中:

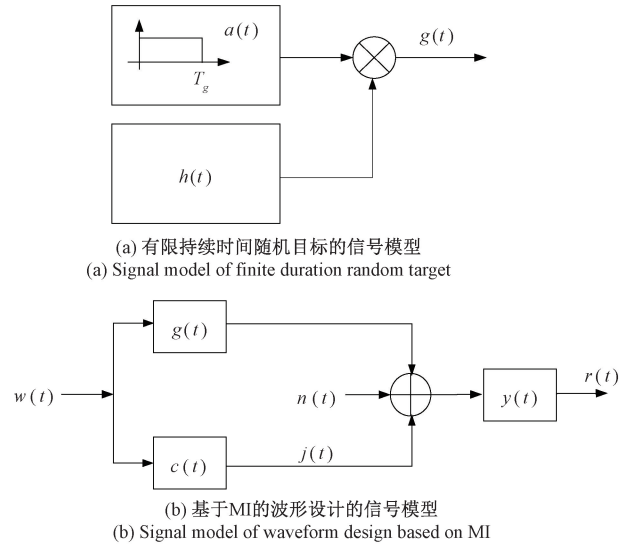


图 2 随机目标模型和信号模型

Fig. 2 Random target model and signal model

$$C(f) = \frac{\sigma_c^2(f)}{2T_r \cdot S_{cc}(f) + \sigma_c^2(f)} \quad (7)$$

$$K(f) = \frac{T_r S_{nn}(f)}{\sigma_c^2(f)}$$

A 是由发射波形的能量约束中推导出的常数:

$$\int_{BW} \max[0, C(f)(A - K(f))] df \leq E_w \quad (8)$$

对于干扰机, 为了降低雷达系统性能, 依然将 MI 作为评判依据。同理, 可以设计表征干扰机系统函数特性的 $S_{cc}(f)$ 使雷达接收信号与目标冲激响应之间的 MI 最小化作为优化准则。MI 由雷达发射波形频谱、目标 ESV、干扰 PSD 和噪声 PSD 表示。设计的最优干扰波形应满足:

$$\min_{S_{cc}(f)} MI(S_{cc}(f)) \quad (9)$$

$$\text{s. t. } \int_{BW} S_{cc}(f) df \leq E_w \quad (10)$$

MI 的最小化表明通过优化干扰波形可以使雷达目标回波中包含了较少的目标信息, 导致雷达的参数估计性能恶化, 从而完成干扰机的干扰任务。利用拉格朗日乘子法获得的在能量约束下使 MI 最小化的最优干扰波形如下:

$$S_{cc}(f) = \max[0, D(f)(\tilde{A} + Q(f))] \quad (11)$$

其中:

$$D(f) = - \frac{\sigma_c^2(f) |W(f)|^2}{2T_r \cdot S_{nn}(f) + \sigma_c^2(f) |W(f)|^2} \quad (12)$$

$$Q(f) = \frac{T_r S_{nn}(f) + \sigma_c^2(f) |W(f)|^2 S_{nn}(f)}{\sigma_c^2(f) |W(f)|^4}$$

$\tilde{A}$ 是由干扰波形的能量约束中推导出的常数:

$$\int_{BW} \max[0, D(f)(\tilde{A} + Q(f))] df \leq E_w \quad (13)$$

在上述设计的发射波形以及干扰波形均未考虑实际环境中频谱估计的有效性,即雷达获得的目标频谱、干扰频谱以及干扰机获得的目标频谱、雷达频谱是不精确的,所以基于准确频谱信息的波形设计并不能有效保证雷达和干扰机在实际环境中的性能,因此,设计一种双鲁棒波形方法可以保证最坏情况下的性能从而减少损失。考虑到战场中的复杂局面,对雷达和干扰机建立博弈模型充分评估电子战环境。

2 博弈中的双鲁棒波形设计

在电子战环境中,战场博弈环境的不了解以及频谱信息的不精确获得会对雷达和干扰机的性能产生巨大的影响。

雷达为最大化雷达接收信号与目标脉冲响应之间的互信息,干扰机在已知雷达、目标、噪声等先验信息的情况下,降低雷达系统获得的 MI。雷达和干扰机之间的对抗关系可以利用博弈论建模。在二者的层次博弈模型下,分别以雷达和干扰机作为领导者,另一方作为跟随者,领导者处于领先位置,领导者和跟随者获得的信息不相等,跟随者将根据前一时刻领导者的波形优化策略,而领导者最终截获跟随者的策略选择自己的策略。雷达和干扰机分别作为领导者时,最终通过发射一个特定的传输波形和干扰波形来完成雷达任务和干扰任务。

由于实际环境中精确的频谱信息很难获得,雷达和干扰机获得的目标频谱是模糊的。不确定性目标模型在鲁棒波形设计中被广泛采用,本文采用文献[41]中的模糊目标模型,对于单个目标,假设真实目标频谱存在于不确定范围 τ 内:

$$|G(f)|^2 \in \tau = \{d_k \leq |G(f_k)|^2 \leq s_k, k=1,2,3,\dots,K\} \quad (14)$$

其中,频率单位由 f_k 表示,不确定性单目标模型如图 3 所示。频谱上每个频率样本的上界和下界由已知的误差幅度表示,即真实值加上或减去随机数,二者之间的差异越大,目标频谱的不确定性就越大。此外,在每个采样频率下,模糊目标频谱的上界和下界之间的振幅差异可能不同。对于每个特定的目标频谱,分别存在干扰机和雷达的最优干扰波形和最优发射波形,然而真实目标频谱在这个不确定性范围内可能会发生变化。因此,针对目标频谱不确定的单鲁棒干扰波形和单鲁棒雷达发射波形是保证不利情况下的最好方法。值得注意的是,在电子战环境中雷达频谱和干扰频谱同样难以精确获得,本文在单鲁棒波形优化基础上,继续展开研究。

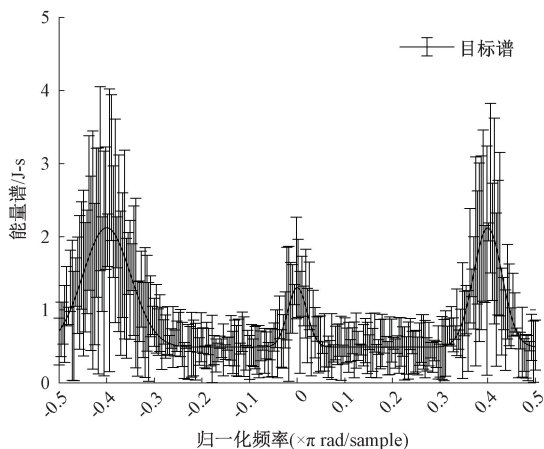


图 3 单目标频谱的不确定模型

Fig. 3 Uncertain model of single target spectrum

2.1 雷达为领导者

首先敌方干扰机作为跟随者将根据前一时刻的雷达波形优化策略。通过先前时刻的雷达频谱和目标频谱由式(11)可以得到跟随者发射的干扰波形 $\bar{S}_{cc}(f)$ 。雷达作为领导者,为了提高雷达性能,最终将根据敌方干扰机的策略来选择合适的策略。

考虑雷达很难获得精准的干扰频谱,类似的,干扰波形频谱被假设存在不确定范围 ε 内:

$$|\bar{S}_{cc}(f)| \in \varepsilon = \{l_k \leq |\bar{S}_{cc}(f_k)| \leq u_k, k=1,2,3,\dots,K\} \quad (15)$$

其中,频率单位由 f_k 表示。因此,雷达获得的干扰频谱和目标频谱都是模糊的,针对此问题,提出一种双鲁棒雷达发射波形设计方法。优化问题如下:

$$\max_{|\bar{W}(f)|^2} \left\{ \min_{|G(f)| \in \tau, |\bar{S}_{cc}(f)| \in \varepsilon} MI \left((|\bar{W}(f)|^2, \sigma_G^2(f), \bar{S}_{cc}(f)) \mid \int_{BW} |\bar{W}(f)|^2 df \leq E_w \right) \right\} \quad (16)$$

基于鲁棒信号处理理论,这个最优问题可以被表示为:

$$\begin{aligned} & MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_G^2(f), \bar{S}_{cc}(f)) \\ & \mid \int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_w \geq \\ & MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), \bar{S}_{cc_{\text{worst}}}(f)) \\ & \mid \int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_w \geq \\ & MI(|\bar{W}(f)|^2, \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), \bar{S}_{cc_{\text{worst}}}(f)) \\ & \mid \int_{BW} |\bar{W}(f)|^2 df \leq E_w \end{aligned} \quad (17)$$

式中:在不等式的右侧,对于雷达发射机来讲,双鲁棒雷达发射波形在 $\sigma_G^2(f) = \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$, $\bar{S}_{cc}(f) = \bar{S}_{cc_{\text{worst}}}(f)$ 情况

下是最优的,它最大限度地提高了雷达发射机的性能。如果采用另一种波形频谱,雷达的性能将会下降。同时,不等式的左侧表示, $\sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$ 和 $\bar{S}_{cc_{\text{worst}}}(f)$ 是对于双鲁棒雷达发射波形最不利的目标 ESV 和干扰 PSD。如果双鲁棒发射波形 $|\bar{W}^{\text{maxmin}}(f)|^2$ 被采用,对于不确定范围内的所有目标 ESV 和干扰 PSD,MI 性能将优于 $\sigma_G^2(f) = \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$, $\bar{S}_{cc}(f) = \bar{S}_{cc_{\text{worst}}}(f)$ 时的最不利情况。因此,不确定范围内最不利情况的双鲁棒雷达发射波形 $|\bar{W}^{\text{maxmin}}(f)|^2$ 是最优的,通过限制最不利条件下的性能,不确定范围内的所有目标频谱和干扰频谱对应的 MI 性能不会比这种情况更差。

雷达为保证最坏情况下性能会选择目标频谱的下界 $\sigma_D^2(f)$ 以及干扰波形频谱的上界 $U(f)$,此时 MI 性能为最低,为雷达的最不利情况。 $\sigma_D^2(f)$ 记为:

$$\sigma_D^2(f) = |D(f)|^2 \quad (18)$$

式中: $D(f)$ 为目标频谱的下界。

定理 1: 式 (16) 中的双鲁棒雷达发射波形的解为:

$$|\bar{W}^{\text{maxmin}}(f)|^2 = \max [0, \bar{C}(f) (\bar{A} - \bar{K}(f))] \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{C}(f) &= \frac{\sigma_D^2(f)}{2T_r \cdot U(f) + \sigma_D^2(f)} \\ \bar{K}(f) &= \frac{T_r S_{nn}(f)}{\sigma_D^2(f)} \end{aligned} \quad (20)$$

$\bar{A}$ 是由双鲁棒雷达发射波形的能量约束中推导出的常数:

$$\int_{BW} \max [0, \bar{C}(f) (\bar{A} - \bar{K}(f))] df \leq E_w \quad (21)$$

双鲁棒雷达发射波形的整体过程如图 4 所示。定理 1 证明详见附录 1。

2.2 干扰机为领导者

首先敌方雷达作为跟随者将根据前一时刻的干扰波形优化策略。通过先前时刻的干扰频谱和目标频谱,由式 (6) 可以得到跟随者发射的雷达波形 $\bar{W}(f)$ 。干扰机作为领导者,为了削弱雷达性能,最终将根据敌方雷达的策略来选择合适的策略。

同理,干扰机很难获得精准的雷达发射频谱。干扰机捕获的雷达发射波形频谱存在不确定范围 ν 内:

$$|\bar{W}(f)| \in \nu = \{q_k \leq |\bar{W}(f_k)| \leq r_k, k = 1, 2, 3, \dots, K\} \quad (22)$$

其中,频率单位由 f_n 表示。因此,干扰机获得的雷达发射频谱和目标频谱都是模糊的,针对此问题,提出一种双鲁棒干扰波形设计方法。优化问题可写为:

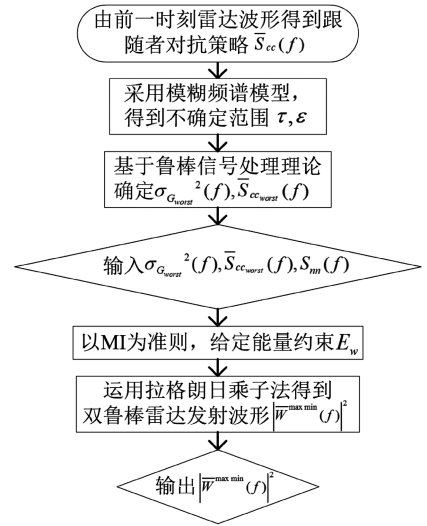


图 4 方法流程

Fig. 4 Flow chart

$$\min_{\bar{S}_{cc}(f)} \left\{ \max_{\substack{|\mathcal{G}(f)| \in \tau, |\bar{W}(f)| \in \nu}} MI \right. \\ \left. \left(\bar{S}_{cc}(f), \sigma_G^2(f), |\bar{W}(f_n)|^2 \right) \mid \int_{BW} \bar{S}_{cc}(f) df \leq E_w \right\} \quad (23)$$

基于鲁棒信号处理理论,这个最优问题可以被表示为:

$$\begin{aligned} MI(\bar{S}_{cc}^{\text{minmax}}(f), \sigma_G^2(f), |\bar{W}(f)|^2) \\ \mid \int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\text{minmax}}(f) df \leq E_w \leq \\ MI(\bar{S}_{cc}^{\text{minmax}}(f), \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), |\bar{W}_{\text{worst}}(f)|^2) \\ \mid \int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\text{minmax}}(f) df \leq E_w \leq \\ MI(\bar{S}_{cc}(f), \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), |\bar{W}_{\text{worst}}(f)|^2) \\ \mid \int_{BW} \bar{S}_{cc}(f) df \leq E_w \end{aligned} \quad (24)$$

式中:在不等式的右侧,对于干扰机来讲,双鲁棒干扰波形 $\sigma_G^2(f) = \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$, $|\bar{W}(f)|^2 = |\bar{W}_{\text{worst}}(f)|^2$ 情况下是最优的,它最大限度地提高了干扰机的性能。如果采用另一种波形频谱,干扰机的性能将会下降。同时,不等式的左侧表示, $\sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$ 和 $|\bar{W}_{\text{worst}}(f)|^2$ 是对于双鲁棒干扰波形最不利的目标 ESV 和雷达发射波形频谱,如果双鲁棒干扰波形 $\bar{S}_{cc}^{\text{minmax}}(f)$ 被采用,对于不确定范围内的所有目标 ESV 和雷达发射波形频谱,MI 性能将优于 $\sigma_G^2(f) = \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f)$, $|\bar{W}(f)|^2 = |\bar{W}_{\text{worst}}(f)|^2$ 时的最不利情

况。因此,不确定范围内最不利情况的双鲁棒干扰波形 $\bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f)$ 是最优的,通过确保最不利条件下的性能,不确定范围内的所有目标频谱和雷达发射波形频谱的性能不会比这种情况更差。

干扰机为保证最坏情况下性能会选择目标频谱的上界 $\sigma_s^2(f)$ 以及雷达发射波形频谱的上界 $R(f)$, 此时 MI 性能为最高,为干扰机的最不利情况。 $\sigma_s^2(f)$ 记为:

$$\sigma_s^2(f) = |S(f)|^2$$

(25)

$S(f)$ 为目标频谱的上界。

定理 2:式 (23) 中的双鲁棒干扰波形的解为:

$$\bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f) = \max [0, \bar{\bar{D}}(f) (\tilde{A} + \bar{\bar{Q}}(f))]$$

(26)

其中:

$$\bar{\bar{D}}(f) = - \frac{\sigma_s^2(f) |R(f)|^2}{2T_r \cdot S_{nn}(f) + \sigma_s^2(f) |R(f)|^2}$$

(27)

$$\bar{\bar{Q}}(f) = \frac{T_r S_{nn}^2(f) + \sigma_s^2(f) |R(f)|^2 S_{nn}(f)}{\sigma_s^2(f) |R(f)|^4}$$

$\tilde{A}$ 是由双鲁棒干扰波形的能量约束中推导出的常数:

$$\int_{BW} \max [0, \bar{\bar{D}}(f) (\tilde{A} + \bar{\bar{Q}}(f))] df \leq E_w$$

(28)

双鲁棒干扰波形的整体过程如图 5 所示。定理 2 证明详见附录 2。

通过对雷达和干扰机建立层次博弈模型,且考虑博弈对抗中二者获得的频谱是模糊的,可以优化雷达和干扰机的最不利情况的性能。

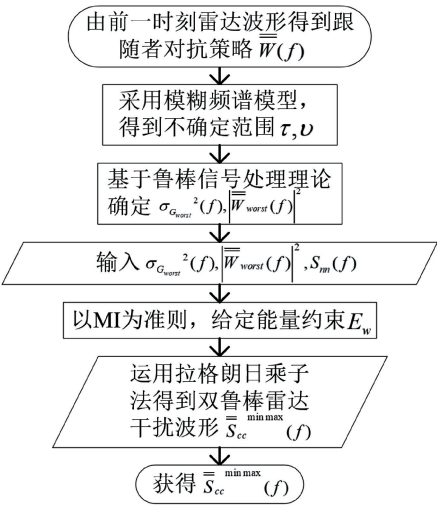


图 5 方法流程
Fig. 5 Flow chart

3 仿 真

本节通过仿真验证本文提出的基于 MI 准则的双鲁棒雷达发射波形和双鲁棒干扰波形设计方法的有效性。目标频谱如图 6 所示,上界是精确的目标频谱加上随机值,类似地,下界是精确的目标频谱减去随机值。主要仿真参数如表 1 所示。

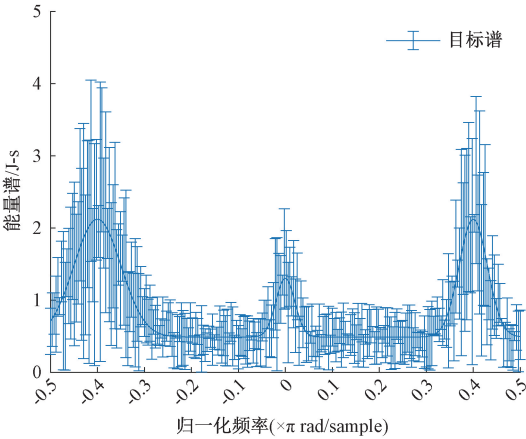


图 6 单目标频谱的不确定模型
Fig. 6 Uncertain model of single target spectrum

表 1 主要仿真参数

Table 1 Main simulation parameters	
参数	值
噪声 PSD	1 W/Hz
采样点	256
目标回波时间 T_r	1 s
雷达波形能量	1 J
干扰波形能量	1 J

基于 MI 准则的双鲁棒雷达发射波形如图 7 所示。由于双鲁棒波形设计考虑了最坏目标频谱和最坏干扰频谱的情况,因此使用不确定目标频谱的下界和不确定干扰频谱的上界来设计双鲁棒雷达发射波形。

当雷达为领导者,敌方干扰机作为跟随者发射的干扰波形如图 7(a) 所示,干扰波形将有限的能量集中在前一时刻发射波形和目标频谱响应都比较强的频带内从而完成干扰任务,考虑雷达无法截获准确的干扰频谱,因此采用图 7(b) 所示的不确定干扰频谱。雷达作为领导者将根据敌方干扰机的策略选择自己的策略,为保证鲁棒性,选择图 7(c) 中不确定目标频谱的下界和不确定干扰频谱的上界设计波形,双鲁棒雷达发射波形如图 7(d) 所示,对仿真结果分析得到以下结论:

1) 在不确定干扰频谱上界小于目标频谱下界的子频带内, 双鲁棒发射波形分配的能量大于前一时刻发射波形(对比图 7(a) 和(d))。由于雷达在实际场景中无法获得精确的目标频谱和干扰频谱, 因此在最坏的情况下, 雷达只能使用不确定干扰频谱上界和不确定目标频谱下界中的数据, 因此, 对于不确定目标频谱下界大于不确定干扰频谱上界的频段, 双鲁棒发射波形必须分配更多的能量, 以确保 MI 的改善。

2) 在不确定干扰频谱上界大于目标频谱下界的子频带内, 双鲁棒发射波形分配的能量小于前一时刻发射波形(对比图 7(a) 和(d))。这种能量分配策略为了最大化 MI, 因为当不确定干扰频谱的上界在某些子频带中远大于不确定目标频谱下界时, 这意味着干扰波形对目标的干扰更大。因此, 在这些子频带中, 通过减少能量分配降低 MI 损耗。

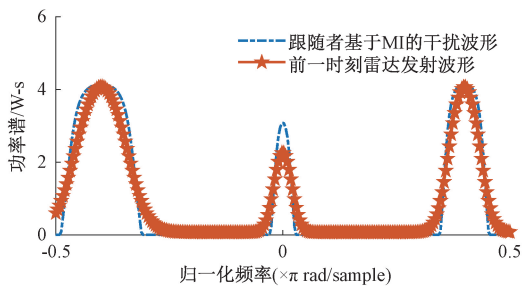
尽管敌方干扰机的干扰策略会极大地削弱雷达系统的性能, 但雷达处于领先位置, 雷达发射机设计的发射波形通过改变能量分配最终可以保证雷达系统的性能。

图 8 为双鲁棒雷达发射波形与单鲁棒雷达发射波形的对比, 同时加入了在理想情况下基于 MI 准则的最优雷达发射波形, 对仿真结果分析得到如下结论:

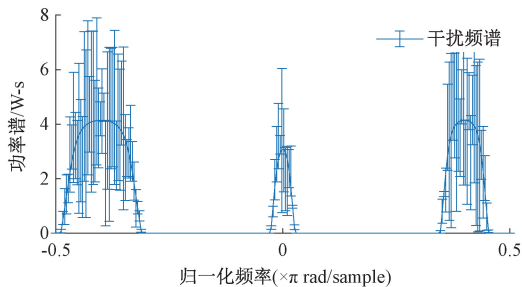
1) 与针对目标频谱不确定的单鲁棒雷达波形和最优波形相比, 在不确定干扰频谱上界小于不确定目标频谱下界的子频带中(见图 7(c)), 双鲁棒波形比单鲁棒波形和最优波形分配更多的能量。相反, 在不确定干扰频谱上界大于不确定目标频谱下界的子频带中(见图 7(c)), 双鲁棒波形比单鲁棒波形和最优波形分配更少的能量, 这是因为双鲁棒波形不仅考虑了不确定的目标频谱, 还考虑了干扰频谱对 MI 的影响, 而单鲁棒波形只考虑了不确定性的目标频谱, 忽略了干扰频谱不确定性对 MI 的影响, 而最优波形并未考虑目标频谱和干扰频谱的不确定性, 忽略了目标频谱和干扰频谱对 MI 的影响。

2) 与针对干扰频谱不确定的单鲁棒雷达波形相比, 无论不确定目标频谱下界是否大于不确定干扰频谱上界, 双鲁棒波形在具有强目标频谱特征子频带中比单鲁棒波形分配更多的能量。这也是因为双鲁棒波形不仅考虑了不确定的干扰频谱, 还考虑了不确定目标频谱对 MI 的影响, 而单鲁棒波形只考虑了不确定性的干扰频谱, 忽略了目标频谱不确定性对 MI 的影响。

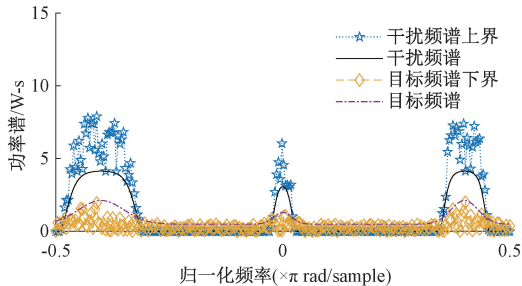
假设雷达波形的总能量在 $1 \sim 10$ J 之间变化, 图 9 在最坏目标频谱和最坏干扰频谱的情况下, 分别比较了使用多种雷达波形时雷达获得的 MI。雷达在使用线性调频(linear frequency modulation, LFM)发射波形情况下, 获得的 MI 最差, 最优发射波形和单鲁棒发射波形使雷达获得的 MI 性能变好, 而双鲁棒发射波形使雷达获得的 MI 性能最好。这是因为在最坏情况下, LFM 发射波形不包含有关目标、噪声和前一时刻干扰波形的信息, 最优发射



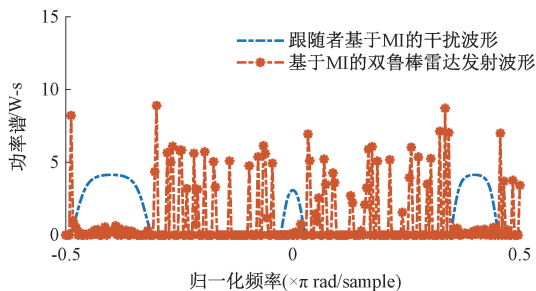
(a) 跟随者干扰波形
(a) Follower interference waveform



(b) 干扰频谱的不确定模型
(b) Uncertain model of interference spectrum



(c) 最坏情况下的目标频谱和干扰频谱
(c) Worst-case target spectrum and interference spectrum

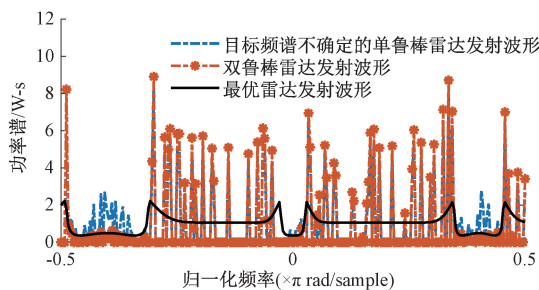


(d) 双鲁棒雷达发射波形
(d) Double robust radar transmitting waveform

图 7 具有不确定目标和干扰频谱的双鲁棒雷达发射波形
Fig. 7 Double robust radar transmitting waveform with uncertain target and jamming spectrum

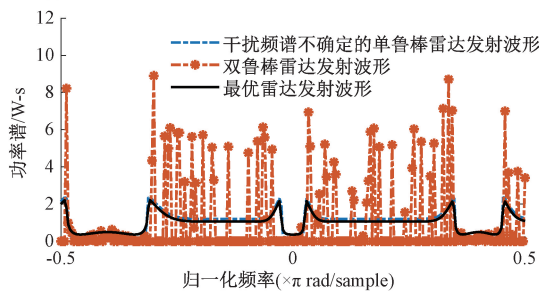
波形根据目标和干扰波形的精准信息来分配能量, 单鲁棒雷达发射波形使用不确定目标频谱的下界或不确定干扰频谱的上界, 而双鲁棒雷达发射波形算法同时考虑了实际场景中不确定的目标频谱和干扰频谱。

基于 MI 准则的双鲁棒干扰波形如图 10 所示。由于双鲁棒波形设计考虑了最坏的情况, 因此使用不确定目



(a) 目标频谱不确定的单鲁棒雷达波形

(a) Single robust radar waveform with uncertain target spectrum



(b) 干扰频谱不确定的单鲁棒雷达波形

(b) Single robust radar waveform with uncertain interference spectrum

图 8 双鲁棒雷达发射波形与单鲁棒雷达发射波形对比

Fig. 8 Comparison of double robust radar transmitting waveform and single robust radar transmitting waveform

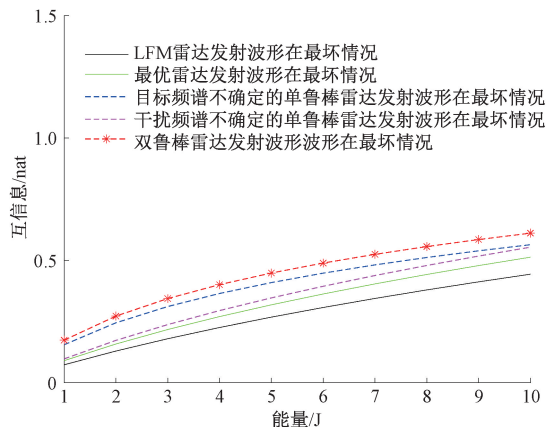


图 9 不同雷达发射波形的 MI 值

Fig. 9 MI values of different radar transmitted waveforms

标频谱的上界和不确定雷达频谱的上界来设计双鲁棒干扰波形。

当干扰机为领导者,敌方雷达作为跟随者发射的雷达波形如图 10(a) 所示,雷达发射波形将能量集中在目标频谱响应较强的频带内从而完成雷达任务。考虑干扰机无法准确截获雷达频谱,图 10(b) 是敌方雷达发射波形的不确定模型。干扰机作为领导者将根据敌方雷达的策略选择自己的策略,为保证鲁棒性,选择图 10(c) 中不确定目标频谱的上界和不确定雷达频谱的上界设计波

形,双鲁棒干扰波形如图 10(d) 所示,对仿真结果分析得到以下结论:

1) 双鲁棒干扰波形与前一时刻干扰波形具有相似的能量分配策略(图 10(a) 和(d)),因为它们是基于相同的准则设计的,它们在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均强的子频带都分配了大部分能量。

2) 在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均弱的子频带内(见图 10(c)),双鲁棒干扰波形比前一时刻干扰波形分配更多的能量,这是因为双鲁棒干扰波形为了对雷达波形造成影响,从而分配更多能量降低 MI。

尽管敌方雷达的策略会极大地提升雷达系统的性能,但干扰机处于领先地位,干扰机设计的干扰波形通过改变能量分配最终可以保证干扰机的性能。

图 11 为双鲁棒干扰波形与单鲁棒干扰波形的对比,同时加入了在理想情况下基于 MI 准则的最优干扰波形,对仿真结果分析得到如下结论:

1) 与针对目标频谱不确定的单鲁棒干扰波形相比,在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均强的子频带内,双鲁棒波形比单鲁棒波形分配更少的能量。相反,在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均弱的子频带内,双鲁棒波形比单鲁棒波形

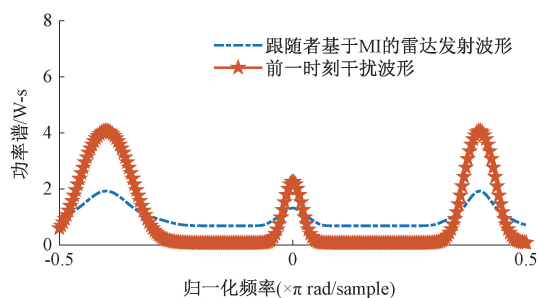
分配更多的能量。这是因为双鲁棒干扰波形不仅考虑了不确定的目标频谱,还考虑了雷达频谱对 MI 的影响,而单鲁棒干扰波形只考虑了不确定性的目标频谱,忽略了雷达频谱对 MI 的影响。

2) 与针对雷达频谱不确定的单鲁棒干扰波形和最优波形相比,可得到相似结论。这也是因为双鲁棒干扰波形不仅考虑了不确定的雷达频谱,还考虑了目标频谱对 MI 的影响,而单鲁棒干扰波形只考虑了不确定性的雷达频谱,忽略了目标频谱对 MI 的影响,而最优波形并未考虑目标频谱和雷达频谱的不确定性,忽略了目标频谱和雷达频谱对 MI 的影响。

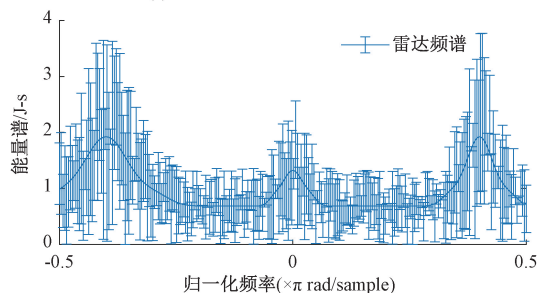
假设干扰波形的总能量在 1~10 J 之间变化,图 12 在最坏目标频谱和最坏雷达频谱的情况下,分别比较了在多种干扰波形干扰下雷达获得的 MI。雷达在 LFM 干扰波形下,获得的 MI 最好,最优干扰波形和单鲁棒干扰波形使雷达获得的 MI 性能变差,而双鲁棒干扰波形使雷达获得的 MI 性能最差。这是因为在最坏情况下,LFM 干扰波形不包含有关目标、噪声和前一时刻发射波形的信息,最优干扰波形根据目标和雷达波形的精准信息来分配能量,单鲁棒干扰波形使用不确定目标频谱的上界或不确定雷达频谱的上界,而双鲁棒干扰波形算法同时考虑了实际场景中不确定的目标频谱和雷达频谱。

4 结 论

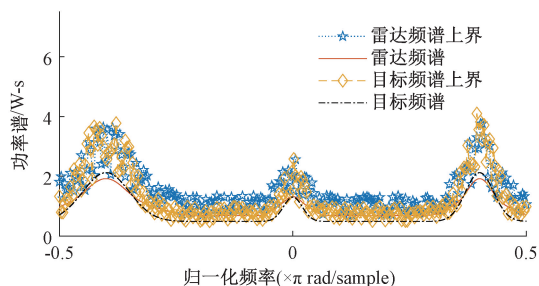
本文分别提出基于 MI 准则的双鲁棒雷达发射波形



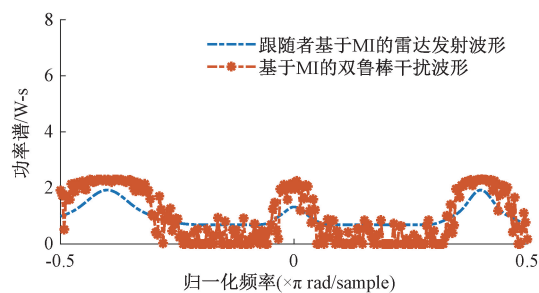
(a) 跟随者雷达发射波形
(a) Follower radar transmit waveform



(b) 跟随者雷达发射波形不确定模型
(b) Follower radar transmit waveform uncertainty model



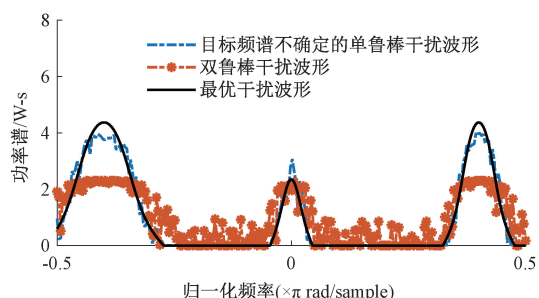
(c) 最坏情况下的目标频谱和雷达频谱
(c) Worst-case target spectrum and radar spectrum



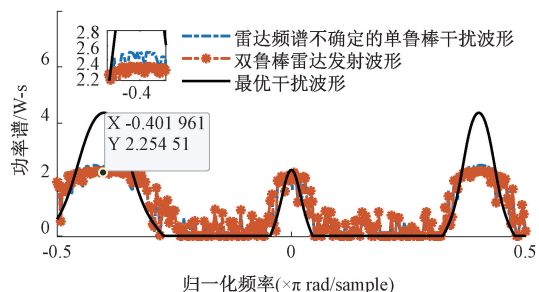
(d) 双鲁棒干扰波形
(d) Double robust interference waveform

图 10 具有不确定目标和雷达频谱的双鲁棒干扰波形
Fig. 10 Double robust jamming waveform with uncertain target and radar spectrum

设计和双鲁棒干扰波形设计。考虑了在实际战场中雷达无法获得精确的目标频谱、干扰频谱,干扰机无法获得精确的目标频谱、雷达频谱,将雷达和干扰机的对抗问题建立博弈模型。仿真结果表明,当雷达为领导者时,在不确定干扰频谱上界小于目标频谱下界的子频带,双鲁棒雷达发射波形分配的能量大于前一时刻雷达发射波形,相



(a) 目标频谱不确定的单鲁棒干扰波形
(a) Single robust interference waveform with uncertain target spectrum



(b) 雷达频谱不确定的单鲁棒干扰波形
(b) Single robust jamming waveform with uncertain radar spectrum

图 11 双鲁棒干扰波形与单鲁棒干扰波形对比

Fig. 11 Comparison of double robust interference waveform and single robust interference waveform

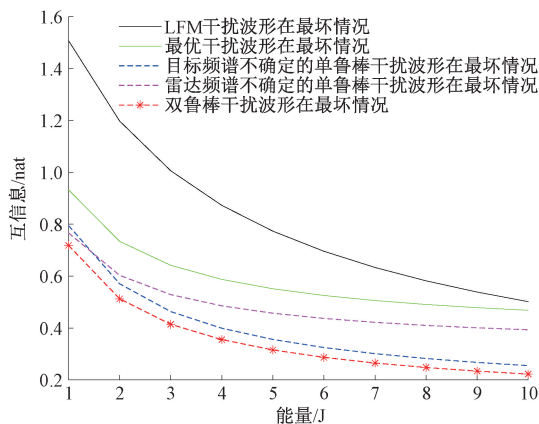


图 12 不同干扰波形的 MI 值

Fig. 12 MI values of different interference waveforms

反,在不确定干扰频谱上界大于目标频谱下界的子频带,双鲁棒发射波形分配的能量小于前一时刻雷达发射波形。当干扰机为领导者时,双鲁棒干扰波形与前一时刻干扰波形具有相似的能量分配策略,它们在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均强的子频带都分配了大部分能量,在不确定雷达频谱上界和不确定目标频谱上界均弱的子频带中,双鲁棒干扰波形比前一时刻干扰波形分配更多的能量。与仅针对单一不确定频谱的单鲁

棒雷达波形和单鲁棒干扰波形相比,双鲁棒雷达波形可以最大化 MI,双鲁棒干扰波形可以最小化雷达系统获得的 MI,雷达和干扰机的性能得到进一步提升。在最不利情况下,雷达和干扰机使用双鲁棒波形设计方法性能能达到最优,如果使用其他波形,雷达和干扰机的性能会下降。本文通过仿真验证了算法的有效性,可以为今后的硬件设备或实际场景实现提供参考。

本文只针对敌对双方都可以获得对手策略的前提下进行研究,在研究过程中,本文只考虑发射机能量约束,然而在实际中,发射信号还受恒模、峰均比等因素约束,如何设计更加适用于现实情况的优化方法,是未来的一个研究重点。

参考文献

- [1] DEBRUHL B, TAGUE P. Living with boisterous neighbors: Studying the interaction of adaptive jamming and anti-jamming [C]. 2012 IEEE International Symposium on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2012.
- [2] JIASI C, SOUMYA S, MUNG C, et al. A framework for energy-efficient adaptive jamming of adversarial communications [C]. 2013 47th Annual Conference on Information Sciences and Systems, 2013.
- [3] AHMAD F, AMIN M G. Stochastic model based radar waveform design for weapon detection [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(2): 1815-1826.
- [4] ROMERO R A, BAE J, GOODMAN N A. Theory and application of SNR and mutual information matched illumination waveforms [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 912-927.
- [5] YUXI W, GUOCE H, WEI L. Waveform design for radar and extended target in the environment of electronic warfare [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2018, 29(1): 48-57.
- [6] HAYKIN S. Cognitive radar: A way of the future [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2006, 23(1): 30-40.
- [7] 邹鲲. 认知雷达的未知目标检测 [J]. 电子与信息学报, 2018, 40(1): 166-172.
ZOU K. Unknown target detection of cognitive radar [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(1): 166-172.
- [8] GUARIGLIA E. Harmonic sierpinski gasket and applications [J]. ENTROPY, 2018, 20(9): 714.
- [9] KIM H S, GOODMAN N A, LEE C K, et al. Improved waveform design for radar target classification [J]. Electronics Letters, 2017, 53(13): 879-881.
- [10] ZHU Z, KAY S, RAGHAVAN R S. Information-theoretic optimal radar waveform design [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(3): 274-278.
- [11] ROMERO R A, GOODMAN N A. Waveform design in signal-dependent interference and application to target recognition with multiple transmissions [J]. IET Radar Sonar and Navigation, 2009, 3(4): 328-340.
- [12] WANG L L, WANG H Q, WONG K K, et al. Minimax robust jamming techniques based on signal-to-interference-plus-noise ratio and mutual information criteria [J]. IET Communications, 2014, 8(10): 1859-1867.
- [13] 西安电子科技大学. 一种基于双互信息的联合优化雷达波形设计方法: CN202310573820.9 [P]. 2023-08-15.
Xidian University. A joint optimization radar waveform design method based on dual mutual information: CN202310573820.9 [P]. 2023-08-15.
- [14] 辛凤鸣, 汪晋宽, 王彬, 等. 基于双互信息准则的雷达自适应波形设计方法 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2019, 40(12): 1690-1694.
XIN F M, WANG J K, WANG B, et al. Radar adaptive waveform design method based on double mutual information criterion [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science) 2019, 40(12): 1690-1694.
- [15] TANG B, TANG J, PENG Y. MIMO radar waveform design in colored noise based on information theory [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(9): 4684-4697.
- [16] 邹佳龙, 姚元, 王建明. 相控阵 MIMO 雷达最佳子阵数目估算方法 [J]. 电子测量技术, 2016, 39(1): 65-68.
ZOU J L, YAO Y, WANG J M. Estimation method of optimal number of subarrays for phased array MIMO radar [J]. Electronic Measurement Technology, 2016, 39(1): 65-68.
- [17] SHI C, WANG F, SALOUS S, et al. Low probability of intercept-based optimal OFDM waveform design strategy for an integrated radar and communications system [J]. IEEE Access, 2018, 6: 57689-57699.
- [18] 高训兵. 具有天线扫描特性的雷达信号算法设计与实现 [J]. 国外电子测量技术, 2017, 36(7): 68-70.
GAO X B. Design and implementation of radar signal algorithm with antenna scanning characteristics [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2017, 36(7): 68-70.

- [19] BACHMANN D J, EVANS R J, MORAN B. Game theoretic analysis of adaptive radar jamming [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 1081-1100.
- [20] SONG X, WILLETT P, ZHOU S, et al. The MIMO radar and jammer games [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(2): 687-699.
- [21] WANG L L, WANG H Q, CHENG Y Q, et al. A novel SINR and mutual Information based radar jamming technique [J]. Journal of Central South University, 2013, 20(12): 3471-3480.
- [22] ZHOU F, ZHAO B, TAO M, et al. A large scene deceptive jamming method for space-borne SAR [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(8): 4486-4495.
- [23] SHI C G, WANG F, SALOUS S, et al. Adaptive jamming waveform design for distributed multiple-radar architectures based on low probability of intercept [J]. Radio Science, 2019, 54(1): 72-90.
- [24] 陈涛, 张颖, 黄湘松. 基于强化学习的自适应干扰波形设计 [J]. 空天防御, 2021, 4(2): 59-66.
CHEN T, ZHANG Y, HUANG X S. Adaptive interference waveform design based on reinforcement learning [J]. Air & Space Defense, 2021, 4(2): 59-66.
- [25] WANG L L, WANG L D, ZENG Y H, et al. Jamming power allocation strategy for MIMO radar based on MMSE and mutual information [J]. IET Radar Sonar and Navigation, 2017, 11(7): 1081-1089.
- [26] 赵虎, 张海伦, 郭嘉琦, 等. 改进的可变加权卡尔曼激光雷达滤波算法 [J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(5): 188-195.
ZHAO H, ZHANG H L, GUO J Q, et al. Improved variable weighted Kalman filtering algorithm for laser radar [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(5): 188-195.
- [27] BAO L, WANG C, LI X, et al. Radar anti-jamming technology based on waveform watermarking [C]. 2018 IEEE 3rd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), 2018.
- [28] 胡泰洋, 邵晓浪, 肖孟煊, 等. 一种线性调频连续波探测抗雷达辐射源干扰方法 [J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(8): 253-260.
HU T Y, SHAO X L, XIAO M X, et al. A method of linear frequency modulated continuous wave detection against radar emitter interference is proposed [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(8): 253-260.
- [29] 蒋孟燃, 李伟, 王兴亮, 等. 干扰条件下基于互信息量准则的弹载雷达波形优化 [J]. 重庆邮电大学学报 (自然科学版), 2016, 28(6): 797-803.
JIANG M R, LI W, WANG X L, et al. Waveform optimization of missile-borne radar based on mutual information criterion under jamming condition [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science), 2016, 28(6): 797-803.
- [30] 蒋孟燃, 李伟, 兰星, 等. 干扰条件下基于 MMSE 准则的弹载雷达认知波形优化 [J]. 火力与指挥控制, 2018, 43(4): 158-164.
JIANG M R, LI W, LAN X, et al. Cognitive waveform optimization of missile-borne radar based on MMSE criterion under interference conditions [J]. Fire and Command Control, 2018, 43(4): 158-164.
- [31] STOICA P, HE H, LI J. Optimization of the receive filter and transmit sequence for active sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(4): 1730-1740.
- [32] WANG F Z, LI H B. Joint waveform and receiver design for co-channel hybrid active-passive sensing with timing uncertainty [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 466-477.
- [33] 甘奕夫, 李伟, 赵俊龙. 干扰条件下基于 Bayesian 博弈的认知制导雷达波形设计 [J]. 空军工程大学学报 (自然科学版), 2021, 22(2): 91-98.
GAN Y F, LI W, ZHAO J L. Waveform design of cognitive guidance radar based on Bayesian game under jamming condition [J]. Journal of Air Force Engineering University, 2021, 22(2): 91-98.
- [34] 李伟, 王泓霖, 郑家毅, 等. 博弈条件下雷达波形设计策略研究 [J]. 电子与信息学报, 2019, 41(11): 2654-2660.
LI W, WANG H L, ZHENG J Y, et al. Research on radar waveform design strategy under game condition [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(11): 2654-2660.
- [35] WANG H L, LI W, WANG H, et al. Radar waveform strategy based on game theory [J]. Radio Engineering, 2019, 28: 757-764.
- [36] 肖宇, 邓正宏, 张展. 基于双阶段互信息准则的多目标检测波形设计 [J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(9): 2736-2742.
XIAO Y, DENG ZH H, ZHANG ZH. Waveform design for multi-target detection based on two-stage mutual information criterion [J]. System Engineering and Electronic Technology, 2022, 44(9): 2736-2742.

- [37] SHI C, WANG F, SELLATHURAI M, et al. Power minimization-based robust OFDM radar waveform design for radar and communication systems in coexistence [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(5): 1316-1330.
- [38] WANG B, CHEN X, XIN F, et al. SINR-and MI-based maximin robust waveform design [J]. Entropy, 2019, 21(1): 33.
- [39] WANG B, CHEN X, XIN F M, et al. MI-Based robust waveform design in radar and jammer games [J]. COMPLEXITY, 2019.
- [40] CHENG X, AUBRY A, CIUNZO D, et al. Robust waveform and filter bank design of polarimetric radar [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(1): 370-384.
- [41] YANG Y, BLUM R S. Minimax robust MIMO radar waveform design [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(1): 147-155.

附录 1

定理 1 的证明如下。为了证明定理 1 提出的结论,那么最优问题应该满足不等式 (17)。首先证明不等式 (17) 的右侧,最不利情况下 MI 的表达式表示如下:

$$MI(|\bar{W}(f)|^2) = T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{\sigma_d^2(f) |\bar{W}(f)|^2}{T_r(U(f) |\bar{W}(f)|^2 + S_{nn}(f))} \right] df \quad (29)$$

利用拉格朗日乘子法产生一个目标函数:

$$L(|\bar{W}(f)|^2, \lambda) = T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{\sigma_d^2(f) |\bar{W}(f)|^2}{T_r(U(f) |\bar{W}(f)|^2 + S_{nn}(f))} \right] df + \lambda \left(E_x - \int_{BW} |\bar{W}(f)|^2 df \right) \quad (30)$$

这相当于使 $L(|\bar{W}(f)|^2)$ 相对 $|\bar{W}(f)|^2$ 最大化,则式 (30) 可转化为:

$$L(|\bar{W}(f)|^2, \lambda) = T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{\sigma_d^2(f) |\bar{W}(f)|^2}{T_r(U(f) |\bar{W}(f)|^2 + S_{nn}(f))} \right] df - \lambda \int_{BW} |\bar{W}(f)|^2 df \quad (31)$$

式 (31) 中, $L(|\bar{W}(f)|^2)$ 可表示为:

$$L(|\bar{W}(f)|^2) = T_r \cdot \ln \left[1 + \frac{\sigma_d^2(f) |\bar{W}(f)|^2}{T_r(U(f) |\bar{W}(f)|^2 + S_{nn}(f))} \right] - \lambda |\bar{W}(f)|^2 \quad (32)$$

由于 $L(|\bar{W}(f)|^2)$ 相对 $|\bar{W}(f)|^2$ 的二阶导数大于 0, 因此取 $L(|\bar{W}(f)|^2)$ 相对于 $|\bar{W}(f)|^2$ 的导数, 并设置为 0, 得到 $|\bar{W}^{\maxmin}(f)|^2$, 即:

$$|\bar{W}^{\maxmin}(f)|^2 = \max \left[0, -\bar{V}(f) + \sqrt{\bar{V}^2(f) + \bar{L}(f)(\hat{A} - \bar{M}(f))} \right] \quad (33)$$

$\hat{A}$ 是由雷达发射波形的能量约束中推导出的常数:

$$\int_{BW} \max[0, -\bar{V}(f) + \sqrt{\bar{V}^2(f) + \bar{L}(f)(\hat{A} - \bar{M}(f))}] df \leq E_x \quad (34)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{V}(f) &= \frac{S_{nn}(f)(2T_r \cdot U(f) + \sigma_d^2(f))}{2U(f)(T_r \cdot U(f) + \sigma_d^2(f))} \\ \bar{L}(f) &= \frac{S_{nn}(f)\sigma_d^2(f)}{U(f)(T_r \cdot U(f) + \sigma_d^2(f))} \\ \bar{M}(f) &= \frac{S_{nn}(f)}{\sigma_d^2(f)T_r} \end{aligned} \quad (35)$$

利用一阶泰勒近似, 式 (33) 化简为:

$$|\bar{W}^{\maxmin}(f)|^2 = \max[0, \bar{C}(f)(\bar{A} - \bar{K}(f))] \quad (36)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{C}(f) &= \frac{\sigma_d^2(f)}{2T_r \cdot U(f) + \sigma_d^2(f)} \\ \bar{K}(f) &= \frac{T_r S_{nn}(f)}{\sigma_d^2(f)} \end{aligned} \quad (37)$$

因此, 得到如下结果:

$$\begin{aligned} MI(|\bar{W}^{\maxmin}(f)|^2, \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), S_{cc_{\text{worst}}}(f)) \int_{BW} |\bar{W}^{\maxmin}(f)|^2 df \leq E_x &\geq MI(|\bar{W}(f)|^2, \\ \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), S_{cc_{\text{worst}}}(f)) \int_{BW} |\bar{W}(f)|^2 df \leq E_x &\end{aligned} \quad (38)$$

接下来证明不等式 (17) 的左侧, 将频谱结果代入 MI 表达式近似积分计算:

$$\begin{aligned}
& MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_G^2(f), S_{cc}(f)) \Big|_{\int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_X} = \\
& T_y \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{|\bar{W}^{\max}(f_k)|^2 \sigma_G^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + |\bar{W}^{\max}(f_k)|^2 S_{cc}(f_k))} \right] \Big|_{\int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f_k)|^2 df \leq E_X} = \\
& T_y \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{\max[0, \bar{C}(f_k)(\bar{A} - \bar{K}(f_k))] \cdot \sigma_G^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + \max[0, \bar{C}(f_k)(\bar{A} - \bar{K}(f_k))] \cdot S_{cc}(f_k))} \right] \geq \\
& T_y \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{\max[0, \bar{C}(f_k)(\bar{A} - \bar{K}(f_k))] \cdot \sigma_d^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + \max[0, \bar{C}(f_k)(\bar{A} - \bar{K}(f_k))] \cdot U(f_k))} \right] = \\
& MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), S_{cc_{\text{worst}}}(f)) \Big|_{\int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_X} \quad (39)
\end{aligned}$$

因此使 MI 最小化的最不利目标频谱为 $G_{\text{worst}}(f) = |D(f)|$, 最不利的干扰频谱 $S_{cc_{\text{worst}}}(f) = U(f)$, 可保证:

$$\begin{aligned}
& MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_G^2(f), \\
& S_{cc}(f)) \Big|_{\int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_X} \geq \\
& MI(|\bar{W}^{\max}(f)|^2, \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), \\
& S_{cc_{\text{worst}}}(f)) \Big|_{\int_{BW} |\bar{W}^{\max}(f)|^2 df \leq E_X} \quad (40)
\end{aligned}$$

全部证明完成。

附录 2

定理 2 的证明如下。为了证明定理 2 提出的结论, 那么最优问题应该满足不等式 (24)。首先证明不等式 (24) 的右侧, 最不利情况下 MI 的表达式可以表示如下:

$$\begin{aligned}
& MI(\bar{\bar{S}}_{cc}(f)) = \\
& T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{\sigma_s^2(f) |R(f)|^2}{T_y(\bar{\bar{S}}_{cc}(f) |R(f)|^2 + S_{nn}(f))} \right] df \quad (41)
\end{aligned}$$

利用拉格朗日乘子法产生一个目标函数:

$$\begin{aligned}
& L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f), \lambda) = \\
& T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{|R(f)|^2 \sigma_s^2(f)}{T_r(S_{nn}(f) + |R(f)|^2 \bar{\bar{S}}_{cc}(f))} \right] df + \\
& \lambda \left[E_X - \int_{BW} \bar{\bar{S}}_{cc}(f) df \right] \quad (42)
\end{aligned}$$

这相当于使 $L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f))$ 相对 $\bar{\bar{S}}_{cc}(f)$ 最小化, 则式 (42) 可转化为:

$$\begin{aligned}
& L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f), \lambda) = \\
& T_r \int_{BW} \ln \left[1 + \frac{|R(f)|^2 \sigma_s^2(f)}{T_r(S_{nn}(f) + |R(f)|^2 \bar{\bar{S}}_{cc}(f))} \right] df - \\
& \lambda \int_{BW} \bar{\bar{S}}_{cc}(f) df \quad (43)
\end{aligned}$$

式 (43) 中, $L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f))$ 可表示为:

$$L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f)) = T_r \cdot$$

$$\ln \left[1 + \frac{|R(f)|^2 \sigma_s^2(f)}{T_r(S_{nn}(f) + |R(f)|^2 \bar{\bar{S}}_{cc}(f))} \right] - \lambda \bar{\bar{S}}_{cc}(f) \quad (44)$$

由于 $L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f))$ 相对 $\bar{\bar{S}}_{cc}(f)$ 的二阶导数大于 0, 因此取 $L(\bar{\bar{S}}_{cc}(f))$ 相对于 $\bar{\bar{S}}_{cc}(f)$ 的导数, 并设置为 0, 得到 $\bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f)$, 即:

$$\begin{aligned}
& \bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f) = \\
& \max \left[0, -\bar{V}(f) + \sqrt{\bar{V}^2(f) - \bar{L}(f)(\bar{A} + \bar{M}(f))} \right] \quad (45)
\end{aligned}$$

$\bar{A}$ 是由于干扰波形的能量约束中推导出的常数:

$$\begin{aligned}
& \int_{BW} \max[0, -\bar{V}(f) + \\
& \sqrt{\bar{V}^2(f) - \bar{L}(f)(\bar{A} + \bar{M}(f))}] df \leq E_X \quad (46)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
& \bar{V}(f) = \frac{S_{nn}(f)}{|R(f)|^2} + \frac{\sigma_s^2(f)}{2T_r} \\
& \bar{L}(f) = \frac{\sigma_s^2(f)}{T_r} \\
& \bar{M}(f) = \frac{T_r S_{nn}^2(f) + \sigma_s^2(f) |R(f)|^2 S_{nn}(f)}{\sigma_s^2(f) |R(f)|^4} \quad (47)
\end{aligned}$$

利用一阶泰勒近似, 式 (45) 化简为:

$$\bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f) = \max[0, \bar{\bar{D}}(f)(\bar{A} + \bar{Q}(f))] \quad (48)$$

其中:

$$\begin{aligned}
& \bar{\bar{D}}(f) = -\frac{\sigma_s^2(f) |R(f)|^2}{2T_r \cdot S_{nn}(f) + \sigma_s^2(f) |R(f)|^2} \\
& \bar{Q}(f) = \frac{T_r S_{nn}^2(f) + \sigma_s^2(f) |R(f)|^2 S_{nn}(f)}{\sigma_s^2(f) |R(f)|^4} \quad (49)
\end{aligned}$$

因此, 得到如下结果:

$$\begin{aligned}
& MI(\bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f), \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), |\bar{\bar{W}}_{\text{worst}}(f)|^2) \Big|_{\int_{BW} \bar{\bar{S}}_{cc}^{\min\max}(f) df \leq E_X} \leq \\
& MI(\bar{\bar{S}}_{cc}(f), \sigma_{G_{\text{worst}}}^2(f), |\bar{\bar{W}}_{\text{worst}}(f)|^2) \Big|_{\int_{BW} \bar{\bar{S}}_{cc}(f) df \leq E_X} \quad (50)
\end{aligned}$$

接下来证明不等式 (24) 的左侧, 将频谱结果代入 MI 表达式, 近似积分计算:

$$\begin{aligned}
& MI(\bar{S}_{cc}^{\min\max}(f), \sigma_G^2(f), |\bar{W}(f)|^2) \Big|_{\int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\min\max}(f) df \leq E_X} = \\
& T_r \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{|\bar{W}(f_k)|^2 \sigma_G^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + |\bar{W}(f_k)|^2 \bar{S}_{cc}^{\min\max}(f_k))} \right] = \\
& T_r \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{|\bar{W}(f_k)|^2 \sigma_G^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + |\bar{W}(f_k)|^2 \cdot \max(0, \bar{D}(f_k) (\tilde{A} + \bar{Q}(f_k)))} \right] \leq \\
& T_r \cdot \sum_{k=1}^K \Delta f \cdot \ln \left[1 + \frac{|R(f_k)|^2 \sigma_s^2(f_k)}{T_r(S_{nn}(f_k) + |R(f_k)|^2 \cdot \max(0, \bar{D}(f_k) (\tilde{A} + \bar{Q}(f_k)))} \right] = \\
& MI(\bar{S}_{cc}^{\min\max}(f), \sigma_{G_{worst}}^2(f), |\bar{W}_{worst}(f)|^2) \Big|_{\int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\min\max}(f) df \leq E_X}
\end{aligned} \tag{51}$$

因此使 MI 最大的最不利目标频谱为 $G_{worst}(f) = |S(f)|$, 最不利雷达频谱为 $|\bar{W}_{worst}(f)|^2 = |R(f)|^2$, 可保证:

$$\begin{aligned}
& MI(\bar{S}_{cc}^{\min\max}(f), \sigma_G^2(f), |\bar{W}(f)|^2) \\
& \Big|_{\int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\min\max}(f) df \leq E_w} \leq \\
& MI(\bar{S}_{cc}^{\min\max}(f), \sigma_{G_{worst}}^2(f), |\bar{W}_{worst}(f)|^2) \\
& \Big|_{\int_{BW} \bar{S}_{cc}^{\min\max}(f) df \leq E_w}
\end{aligned} \tag{52}$$

全部证明完成。

作者简介



辛凤鸣 (通信作者), 2019 年于东北大学获得博士学位, 现为东北大学秦皇岛分校计算机与通信工程学院副教授, 主要研究方向为雷达自适应波形优化、雷达通信一体化信号处理。

E-mail: 1001007@neuq.edu.cn

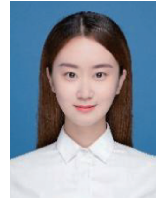
Xin Fengming (Corresponding author), received his Ph. D. degree from Northeastern University in 2019. He is now an associate professor at the School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao. His main research interests include radar adaptive waveform design and signal processing for radar-communication integration.



罗晨, 2021 年于东北林业大学获得学士学位。现在东北大学秦皇岛分校计算机与通信工程学院攻读硕士学位, 主要研究方向为雷达自适应波形优化和认知雷达电子对抗。

E-mail: 2172168@stu.neu.edu.cn

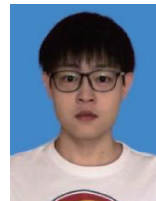
Luo Chen received his B. Sc. degree from Northeast Forestry University in 2021. He is now a M. Sc. candidate at the School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao. His main research interests include radar adaptive waveform optimization and cognitive radar electronic countermeasures.



张晨雪, 2019 年于河北大学获得学士学位。现在东北大学秦皇岛分校计算机与通信工程学院攻读硕士学位, 主要研究方向为微波无源器件和介质谐振器天线。

E-mail: 2172189@stu.neu.edu.cn

Zhang Chenxue received her B. Sc. degree from Hebei University in 2019. She is now a M. Sc. candidate at the School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao. Her main research interests include microwave passive devices and dielectric resonator antennas.



张明峰, 2021 年于中国矿业大学获得学士学位。现在东北大学秦皇岛分校计算机与通信工程学院攻读硕士学位, 主要研究方向为雷达自适应波形优化和智能优化算法。

E-mail: 2172191@stu.neu.edu.cn

Zhang Mingfeng received his B. Sc. degree from China University of Mining and Technology in 2021. He is now a M. Sc. candidate at the School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao. His main research interests include radar adaptive waveform optimization and intelligent optimization algorithm.