DOI: 10. 13382/j. jemi. B2205377

改进的双 N 步相移轮廓术*

徐　鹏　刘锦涛　王建华
（青岛理工大学信息与控制工程学院　青岛　266520）

摘　要：条纹投影三维测量中，双 N 步相移轮廓术通过扩充一倍的投影条纹数量以补偿由测量系统的非线性响应导致的相位误差，但测量效率也因此降低。针对这一问题，提出了一种改进的双 N 步相移方法，该方法与传统的双 N 步相移法相比，在减少相移条纹数量的同时保持了测量精度。利用删减后的条纹计算原始和附加相位值，融合两相位实现物体的三维重建。实验结果表明，与传统双 N 步相移法相比，所提方法具有相同的相位误差补偿精度，并将测量效率提高了16.7%，同时证实了本文采用的三频分层相位展开的可靠度要优于三频外差法的相位展开可靠度。

关键词：三维测量；相位误差；双 N 步相移法；相位展开可靠度
中图分类号：TP391；TN247　　**文献标识码**：A　　**国家标准学科分类代码**：140.30

Improved double N-step phase-shifting profilometry

Xu Peng　Liu Jintao　Wang Jianhua
(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

Abstract: In fringe projection three-dimensional measurement, double N-step phase-shifting profilometry compensates the phase error caused by the nonlinear response of the measurement system by expand twice the number of projection fringes, but the measurement efficiency is also reduced. To address the above concerns, an improved double N-step phase-shifting method is proposed in this paper. Compared with the traditional double N-step phase-shifting method, the proposed method can reduce the number of phase-shifting fringes while maintaining the measurement accuracy. The original and additional phase are calculated by using the deleted fringes, and the two phases are fused to realize the three-dimensional reconstruction of the object. Experimental results demonstrate that the proposed method has the same phase error compensation accuracy as the traditional double N-step phase-shifting method, and the measurement efficiency of the proposed method is improved by 16.7%. At the same time, it is confirmed that the reliability of the three-frequency hierarchical phase unwrapping used in this paper is better than that of the three-frequency heterodyne method.

Keywords: three-dimensional measurement; phase error; double N-step phase shift method; phase unwrapping reliability

0　引　言

光栅投影三维测量轮廓术广泛应用于娱乐产业、工业制造、机器视觉、安全和文物保护等领域[1-4]，其非接触、高精度、高速的特点，使其得到了快速的发展。相移轮廓术（phase shifting profilometry, PSP）已成为最常用的光栅投影测量方法之一，测量系统的三维重构原理是将光栅条纹通过计算机传送给非线性的数字投影仪，投影仪再将光栅投射到实验物体表面，再由同样非线性的CCD相机捕获经物体调制和其他因素共同影响后的光强，此时被捕获的条纹不具有正弦性[5-6]。通过计算可以获得相位主值，进而利用相位展开求得隐含物体高度信息的实际相位，最后利用相位和标定参数，获得被测物体的三维几何信息。由于系统的非线性响应而导致条纹强度的非正弦性将会导致相位误差。通过增加相移步数可以消弱该相位误差，譬如20步相移法等，但这将严重降低测量效率。对于常用的三步或四步相移法，非正弦相

收稿日期：2022-04-12　　Received Date：2022-04-12
*基金项目：山东省自然科学基金（ZR2021MF024）项目资助

位误差被认为是主要误差源。因此在减小误差的同时提升测量效率是当前主要研究的问题之一。

对于补偿相位误差和提高测量速度,许多研究学者提出了各自的办法。Cai 等[7]提出了一种通过 Hierbot 变换直接处理相移条纹来补偿相位误差的方法;Zhang 等[8]通过捕获图像信息来生成误差查询表格对使用相移算法而产生的误差进行补偿;Pan 等[9]构建了一种数学模型通过迭代的方式进行相位误差补偿;Zhang 等[10]提出了一种改进的“2+1”算法,通过投影 1 幅均匀平面图像与另外 2 幅光栅条纹即可获取相位信息;Zuo 等[11]提出了一种新的双频“3+2”相移算法,通过 3 幅高频条纹图得到图像的平均灰度和相位主值,然后利用所得平均灰度值与 2 幅低频条纹图求得低频条纹的相位主值来提高测量效率。Zuo 等[12]还提出一种单频“2+2”相移算法,通过 2 幅无频率的光强图辅助 2 幅条纹图得到包裹相位,并通过光强条纹的基相图得到展开相位。

Huang 等[13]提出了一种双三步相移算法,通过对一组 3 幅原始光栅条纹附加一组 3 幅光栅条纹来消除误差,将原光栅条纹和附加条纹的初始相位差设计为 60°,对两组光栅条纹两次运用三步相移法计算获得相位主值图,分别进行相位展开后融合两组条纹的展开相位值,最后得到融合后的相位信息。实验验证该方法对于由测量系统引起的非线性误差有明显的消减效果,融合相位精度较高。但该方法通过对两组光栅条纹的相位信息进行融合,增添了实际测量时间。本文针对这一问题提出了一种对条纹数目删减的方法,该方法将原始相移条纹中高频条纹的相位信息代入到其余相移条纹的相位计算中即可获得所有频率原始相移条纹的相位主值,而后根据所求相位主值可求出原始相移条纹的展开相位值,最后与附加相移条纹的展开相位融合,从而可减少原始相移条纹幅数。通过实验证明了该方法在保证有效消除相位误差的同时,提高了传统双 N 步相移法的测量效率。

1　原　理

1.1　光栅条纹生成与系统误差

计算机将生成的结构光栅图传送给数字投影仪,光栅条纹通常为正弦条纹或余弦条纹,光栅图像的条纹灰度分布为:

$$I_n(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos[2\pi f_0 x + \delta_n] \tag{1}$$

式中:$a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 分别代表投影图像的平均灰度和灰度调制,f_0 代表光栅条纹的频率(条纹周期数除以条纹宽度),δ_n 代表初始相位。

光栅条纹通过计算机传送给投影仪,投影仪再将光栅投射到被测物体,而后将被 CCD 相机捕获。其原理如图 1 所示。对于市场中常见的投影仪产品,为了适应人类视觉对光强的敏感性通常采用伽马变换来改变投影仪对投影光强的视觉效果,美国国家电视系统委员会对 γ 的推荐值为 2.2[14],而实际中投影仪的设定 γ 通常是非线性的,可将 γ 视作光强的幂函数。常用投影仪的视觉显示系统中具有伽马失真现象,即非线性响应,其投射出的光栅条纹灰度值呈非正弦化,同时,被 CCD 相机捕获的入射光中含有周围的环境光和被测物体表面的反射光,此时将相机采集到的光栅条纹表示为:

$$I_n^c(x,y) = f[I_n(x,y)] = \alpha_2(x,y) + r(x,y) \times [I_n(x,y) + \alpha_1(x,y)] \tag{2}$$

式中:$f(I)$ 为 I 的函数,代表 CCD 相机对捕获光强的响应,$\alpha_1(x,y)$ 代表投影仪周围的环境光,$\alpha_2(x,y)$ 代表进入相机镜头的环境光,$r(x,y)$ 代表测试对象表面的反射率。由此可见,系统的非线性响应会不可避免地导致相机捕获到的光栅条纹偏离理想正弦波呈现非正弦化。

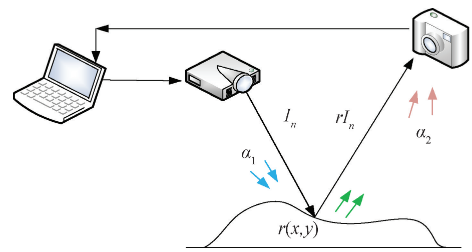


图 1　结构光投影原理

Fig. 1　Principle of structured light projection

根据文献[15],利用相移光栅投影测量轮廓术可将 CCD 相机实际捕获的光栅条纹的灰度值函数近似表示为:

$$\begin{cases} I_n^c(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) + \delta_n] \\ A(x,y) = r(x,y)[a(x,y) + \alpha_1(x,y)] + \alpha_2(x,y) \\ B(x,y) = r(x,y)b(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

非线性的光栅条纹灰度值函数可由傅里叶级数表示为:

$$I_n^c(x,y) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k\cos[k(\phi(x,y) + \delta_n)] \tag{4}$$

式中:K 为谐波最大次数,A_k 为谐波系数。实际上,由 5 次以上的高次谐波引起的相位计算误差将不会影响整体相位计算结果,故通常忽略高次谐波。所以 K 的取值一般在 1~5 之间。

因此非线性光栅条纹灰度值可用 5 阶傅里叶级数表示为:

$$I_n^c(x,y) \approx A_0 + \sum_{k=1}^{5} A_k\cos[k(\phi(x,y) + \delta_n)] \tag{5}$$

为了便于计算,下文将坐标 (x,y) 省略。

1.2　单 N 步相移法和非线性相位误差

单 N 步相移法因具有高精度、抗干扰能力强、计算量

小等优点已成为应用最广泛的相移算法，其基本思想是将一幅光栅条纹在一个周期内沿着与条纹垂直的方向移动 N 次，移动的次数 N 也代表相机捕获的光栅条纹图数目。根据式(1)，其中含有 3 个未知量 $a, b, 2\pi f_0 x$(即相位 φ)，因此用相移法解相位最少需要 3 幅光栅条纹图。N 的取值通常在 3~5 之间，分别称之为三步相移法、四步相移法和五步相移法。光栅条纹的灰度值分布为：

$$I_n^c = A + B\cos[\phi + 2\pi(n-1)/N] \tag{6}$$

式中：n 代表相移的第 n 次，N 代表相移的总次数，且$n\in[1,N]$。

当相机采集光栅条纹图后需进行相位计算求取相位主值，即包裹相位，单 N 步相移法计算相位主值的公式为：

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\sum_{n=1}^{N} I_n^c \sin[2\pi(n-1)/N]}{\sum_{n=1}^{N} I_n^c \cos[2\pi(n-1)/N]} \tag{7}$$

式中：ϕ 代表相位主值，$I_n{}^c$ 代表第 n 次相移时相机图像灰度值。

当进行单三步、四步相移时，相位主值公式可分别写为：

$$\phi_{3-step} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(I_2 - I_3)}{2I_1 - I_2 - I_3} \tag{8}$$

$$\phi_{4-step} = \tan^{-1}\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \tag{9}$$

根据式(5)和(7)，可以计算出条纹的实际相位主值为：

$$\phi^r = \tan^{-1}\frac{\sum_{n=1}^{N}\left\{A_0 + \sum_{k=1}^{5} A_k\cos[k(\phi+\delta_n)]\right\}}{\sum_{n=1}^{N}\left\{A_0 + \sum_{k=1}^{5} A_k\cos[k(\phi+\delta_n)]\right\}} \times \frac{\sin[2\pi(i-1)/N]}{\cos[2\pi(i-1)/N]} \tag{10}$$

式中：ϕ^r 代表实际的包裹相位。

实际的包裹相位是理想的包裹相位与相位误差之和，可表示为：

$$\phi^r = \phi + \Delta\phi \tag{11}$$

因此，相位误差可由实际包裹相位和理想包裹相位表示为：

$$\tan(\Delta\phi) = \tan(\phi^r - \phi) = \frac{\tan(\phi^r) - \tan(\phi)}{1 + \tan(\phi^r)\tan(\phi)} \tag{12}$$

$$\Delta\phi = \tan^{-1}\frac{\tan(\phi^r) - \tan(\phi)}{1 + \tan(\phi^r)\tan(\phi)} \tag{13}$$

根据式(5)、(7)和(13)，可计算出标准三步相移法的包裹相位误差为：

$$\Delta\phi_{3-step} = \tan^{-1}\frac{-(a_2 - a_4)\sin(3\phi) - a_5\sin(6\phi)}{a_1 + (a_2 + a_4)\cos(3\phi) + a_5\cos(6\phi)} \approx -k_1\sin(3\phi) - k_2\sin(6\phi) \tag{14}$$

式中：$\Delta\phi_{3-step}$ 代表三步相移法的相位主值误差，k_1 和 k_2 为两个常数。

同时，可得到四步相移法的包裹相位误差：

$$\Delta\phi_{4-step} = \tan^{-1}\frac{-(a_3 - a_5)\sin(4\phi)}{a_1 + (a_3 + a_5)\cos(4\phi)} \approx -k_1\sin(4\phi) - k_2\sin(8\phi) \tag{15}$$

根据标准三步、四步相移法的包裹相位误差值可归纳出单 N 步相移法的相位主值误差为：

$$\Delta\phi_{N-step} \approx -k_1\sin(N\phi) - k_2\sin(2N\phi) \tag{16}$$

式中：$\Delta\phi_{N\text{-}step}$ 代表 N 步相移法的相位主值误差值，k_1 代表低次谐波幅值，k_2 代表高次谐波幅值。根据文献[14]，由于 k_1 要远远大于 k_2，因此可将 k_2 值省略。所以相位主值误差可近似表示为：

$$\Delta\phi_{N-step} \approx -k\sin(N\phi) \tag{17}$$

所以可将式(14)、(15)近似表示为：

$$\Delta\phi_{3-\text{step}} \approx -k\sin(3\phi) \tag{18}$$

$$\Delta\phi_{4-step} \approx -k\sin(4\phi) \tag{19}$$

显而易见，相位主值误差值近似线性分布，且和相移步数 N、相位值 φ 相关。

2　改进的双 N 步相移法

2.1　相位误差补偿

当前对于相位误差补偿的方法有多种，对于式(17)中呈正弦周期性的包裹相位误差可以使用双 N 步相移法来进行消除。双 N 步相移法的基本思想是在原来 N 幅光栅图的基础上添加相位差 π/N 的 N 幅附加光栅条纹，使两套光栅条纹的正弦性包裹相位误差值相差半个周期，因此两套条纹的误差值互为相反数，融合两套条纹的相位即可实现不同位置的波动误差消除的目的。

式(1)为原始相移条纹的灰度函数分布，因此附加相移条纹的灰度值函数可表示为：

$$I_n^E = a + b\cos[2\pi f_0 x + \delta_n + \pi/N] \tag{20}$$

附加相移条纹的包裹相位计算公式为：

$$\phi^E = -\tan^{-1}\frac{\sum_{n=1}^{N} I_n^E \sin[2\pi(n-1)/N + \pi/N]}{\sum_{n=1}^{N} I_n^E \cos[2\pi(n-1)/N + \pi/N]} \tag{21}$$

附加相移条纹的包裹相位误差 $\Delta\phi_{N\text{-}step}^E$ 可表示为：

$$\Delta\phi_{N-step}^E \approx -k\sin[N(\phi + \pi/N)] \tag{22}$$

当 $N=3$ 时，附加相移条纹与原始相移条纹的初始相位差为 $\pi/3$，相位误差为：

$$\Delta\phi_{3-step}^E \approx k\sin(3\phi) \tag{23}$$

同理，当 $N=4$ 时，附加相移条纹的初始相位差为 $\pi/4$，相位误差为：

$$\Delta\phi_{4-step}^{E} \approx k\sin(4\phi) \tag{24}$$

对比式(18)、(19)和(23)、(24)知,原光栅条纹与附加相移条纹因初始相位差值 π/N 导致相位误差值处处相反,即融合两套条纹图可消除误差获得较为精确的相位结果。

2.2 原始相移条纹数改进方法

传统的双 N 步相移法需要采集 $2N$ 幅条纹图,这极大地影响了算法的测量效率,在实际测量中无法达到快速、高效的要求。

本文提出的算法其基本思想是对双 N 步相移算法中的 N 幅原始相移条纹图做出改进,通过减少原始相移条纹数目达到提升测量效率的同时不对测量精度产生过大影响的目的。三频三步相移法虽实现简单,投影条纹数量少,但其抗外部干扰能力弱于三频四步相移法,因此本文以下部分对原始相移条纹和附加相移条纹进行相位计算时均以三频四步相移法为例。对原始相移条纹数目进行缩减的基本原理如下:

利用传统三频四步相移法(简称 $4f_H+4f_M+4f_L$)进行相位计算需要 3 种频率共 12 幅条纹图,现被缩减为 8 幅。改进后的三频四步相移法(简称 $4f_H+2f_M+2f_L$)中高频条纹图 4 幅(频率为 f_1),中频条纹图 2 幅(频率为 f_2),低频条纹图 2 幅(频率为 f_3)。根据式(1),4 幅高频原始相移条纹图的灰度函数可表示为:

$$\begin{cases} I_1^{f_1} = a + b\cos[\phi_{f_1}] \\ I_2^{f_1} = a + b\cos[\phi_{f_1} + \pi/2] \\ I_3^{f_1} = a + b\cos[\phi_{f_1} + \pi] \\ I_4^{f_1} = a + b\cos[\phi_{f_1} + 3\pi/2] \end{cases} \tag{25}$$

利用式(25)可以计算出频率为 f_1 的高频原始相移条纹图的平均灰度值 a 和包裹相位 φ_{f1} 分别为:

$$a = \frac{I_1^{f_1} + I_2^{f_1} + I_3^{f_1} + I_4^{f_1}}{4} \tag{26}$$

$$\phi_{f_1} = \tan^{-1}\frac{I_4^{f_1} - I_2^{f_1}}{I_1^{f_1} - I_3^{f_1}} \tag{27}$$

同理,根据式(1),对于频率为 f_2 的两幅中频原始相移条纹图和频率为 f_3 的两幅低频原始相移条纹图的灰度值函数可表示为:

$$\begin{cases} I_1^{f_2} = a + b\cos[\phi_{f_2}] \\ I_2^{f_2} = a + b\cos[\phi_{f_2} + \pi/2] \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} I_1^{f_3} = a + b\cos[\phi_{f_3}] \\ I_2^{f_3} = a + b\cos[\phi_{f_3} + \pi/2] \end{cases} \tag{29}$$

由于原始相移条纹图的平均灰度值 a 已经根据式(26)得出,此时利用两步相移法和式(28)、(29)可以计算出频率为 f_2 和 f_3 的原始相移条纹包裹相位值 ϕ_{f2}、ϕ_{f3} 分别为:

$$\phi_{f_2} = \tan^{-1}\frac{a - I_2^{f_2}}{I_1^{f_2} - a} \tag{30}$$

$$\phi_{f_3} = \tan^{-1}\frac{a - I_2^{f_3}}{I_1^{f_3} - a} \tag{31}$$

通过以上理论分析,利用 8 幅原始相移条纹图就可以得到频率分别为 f_1、f_2 和 f_3 的条纹图的包裹相位,这比传统的双 N 步相移法计算原始相移条纹减少了 4 幅条纹图,效率提升了 16.7%。

2.3 三频分层相位展开法

相位展开通常有时间相位展开和空间相位展开法两大类,其中应用广泛的时间相位展开法对沿着时间轴方向上的相位逐点展开,避免了由反三角函数引起的相位截断在展开时对其他像素点扩散误差。三频分层相位展开法具有实现简单、快速的优点,在时间相位展开法中有其独特优势。

应用三频分层相位展开法需要先确定频率为 1 的包裹相位,故其投影的 3 组条纹频率应各为 $f=1, \sqrt{s}, s$。参考式(7)可分别得到 3 组条纹的包裹相位值 $\phi(1)$、$\phi(\sqrt{s})$ 和 $\phi(s)$,其中频率为 1 的条纹包裹相位 $\phi(1)$ 也是展开相位值,即 $\phi(1)=\phi(1)$,而后由展开相位 $\phi(1)$ 反推展开相位 $\phi(\sqrt{s})$ 和 $\phi(s)$,可将三频分层展开法的相位展开过程表示为:

$$\begin{cases} \varphi(1) = \phi(1) \\ \varphi(\sqrt{s}) = \phi(\sqrt{s}) + 2\pi \times \mathrm{round}\left[\dfrac{\sqrt{s}\varphi(1) - \phi(\sqrt{s})}{2\pi}\right] \\ \varphi(s) = \phi(s) + 2\pi \times \mathrm{round}\left[\dfrac{\sqrt{s}\varphi(\sqrt{s}) - \phi(s)}{2\pi}\right] \end{cases} \tag{32}$$

式中:round 为圆整函数。

2.4 三频外差法

三频外差法对包裹相位进行展开即在全场范围内对 3 组不同频率的条纹进行叠加求取展开相位,原理如图 2 所示。假设 3 组光栅条纹频率各为 f_H、f_M 和 f_L($f_H>f_M>f_L$),参考式(7)可分得到 3 组条纹的包裹相位值 ϕ_{fH}、ϕ_{fM} 和 ϕ_{fL},而后将其两两叠加可生成叠加包裹相位 ϕ_{fH-fM} 和 ϕ_{fM-fL},通过选择合适的频率 f,最后一次两两叠加可生成唯一的叠加包裹相位 $\phi_{fH-fM-fL}$,而叠加包裹相位 $\phi_{fH-fM-fL}$ 也是展开相位,即 $\phi_{fH-fM-fL}=\varphi_{fH-fM-fL}$。利用展开相位 $\varphi_{fH-fM-fL}$ 可反推一级条纹的展开相位 φ_{fH-fM} 和 φ_{fM-fL},再反推二级条纹展开相位 φ_{fH},φ_{fM},φ_{fL}。

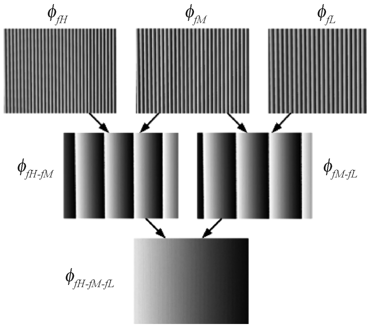


图 2　三频外差法原理

Fig. 2　Principle of three-frequency heterodyne method

2.5　相位展开可靠度

当减少原始相移条纹数来计算包裹相位后，利用外差法展开相位的相位展开可靠度低于分层法。首先分析三频分层法，假设对 3 个频率分别为 f_H、f_M 和 f_L 的条纹图（$f_H>f_M>f_L$）用分层法 $4f_H+4f_M+4f_L$ 和 $4f_H+2f_M+2f_L$ 求解展开相位，可以求出其高频展开相位值为：

$$\begin{cases}\varphi_H = \phi_H + 2\pi\times k = \phi_H + 2\pi\times \mathrm{round}\left[\dfrac{(f_H/f_M)\varphi_M - \phi_H}{2\pi}\right] \\ \varphi_M = \phi_M + 2\pi\times k = \phi_M + 2\pi\times \mathrm{round}\left[\dfrac{(f_M/f_L)\varphi_L - \phi_M}{2\pi}\right] \\ \varphi_L = \phi_L\end{cases} \tag{33}$$

式中：ϕ_H、ϕ_M、ϕ_L 分别代表频率为 f_H、f_M、f_L 条纹图的包裹相位值，φ_H、φ_M、φ_L 分别代表频率为 f_H、f_M、f_L 条纹图的展开相位值，k 代表条纹级数。

可以看出，高频条纹的展开相位 φ_H 包括：高频条纹包裹相位 φ_H 和条纹级数 k 与 2π 的乘积。因此，其展开相位误差 $\Delta\varphi_H$ 也包括高频条纹的包裹相位误差 $\Delta\phi_H$ 和条纹级数误差 Δk 与 2π 的乘积，即：

$$\begin{cases}\Delta\varphi_H = \Delta\phi_H + 2\pi\times\Delta k \\ \Delta k = \mathrm{round}\left[\dfrac{(f_H/f_M)\Delta\varphi_M - \Delta\phi_H}{2\pi}\right]\end{cases} \tag{34}$$

由于采用 $4f_H+2f_M+2f_L$ 算法的高频条纹的包裹相位精度和 $4f_H+4f_M+4f_L$ 算法一致，因此对于高频条纹的展开相位精度，两者的区别在于条纹级数的误差值，即式（34）中 Δk。而两算法中的中频条纹展开相位精度也与条纹级数误差有关，即：

$$\Delta k = \mathrm{round}\left[\frac{(f_M/f_L)\Delta\varphi_L - \Delta\phi_M}{2\pi}\right] \tag{35}$$

因此，本文从相位展开过程中产生条纹级数误差 Δk 的可靠度（或可能性）来定义相位展开可靠度。换句话说，相位过程中产生条纹级数误差 Δk 的值越小相位展开可靠度越高。

取式（35）中圆整算子的分子，并定义为：

$$\Delta k_N = \frac{f_M\Delta\varphi_L}{f_L} - \Delta\phi_M \tag{36}$$

在相位展开过程中，为了保证条纹级数 k 的正确，Δk_N 应满足以下条件：

$$|\Delta k_N| < \pi \Leftrightarrow \left|\frac{f_M\Delta\varphi_L}{f_L} - \Delta\phi_M\right| < \pi \tag{37}$$

分别对 $4f_H+4f_M+4f_L$ 算法和 $4f_H+2f_M+2f_L$ 算法的条纹级数误差的分子 Δk_N 进行对比，发现 Δk_N 的误差越小，产生条纹级数误差 Δk 的可能性越小，即展开可靠度越高。$4f_H+4f_M+4f_L$ 算法和 $4f_H+2f_M+2f_L$ 算法有两次相位展开，这里假设 f_H/f_M 和 f_M/f_L 的值相等，这样可以仅讨论其中某次相位展开的可靠度，本文这里讨论等式（35），即中频条纹的相位展开过程。

对于四步相移法，根据文献[15]，包裹相位误差的方差为：

$$\sigma^2_{\Delta\phi-4step} = \frac{2\sigma^2}{4b^2} \tag{38}$$

式中：$\sigma^2_{\Delta\phi-4step}$ 也是 $4f_H+4f_M+4f_L$ 分层法中条纹频率为 f_L 的方差。

对于 $4f_H+2f_M+2f_L$ 算法中的两步相移法，其包裹相位误差的方差需要进一步讨论。首先，频率为 f_L 的采集条纹灰度分布为：

$$\begin{cases} I_1^{f_L} = a + b\cos[\phi^{f_L}] \\ I_2^{f_L} = a + b\cos[\phi^{f_L} + \pi/2]\end{cases} \tag{39}$$

根据式（7），可得到两步相移法的包裹相位为：

$$\phi^{f_L}_{2-step} = \arctan\left(\frac{I_1^{f_H} + I_2^{f_H} + I_3^{f_H} + I_4^{f_H} - 4I_2^{f_L}}{4I_1^{f_L} - I_1^{f_H} - I_2^{f_H} - I_3^{f_H} - I_4^{f_H}}\right) \tag{40}$$

根据文献[12]，两步相移法的包裹相位误差为：

$$\Delta\phi^{f_L}_{2-step} \approx \arctan\left(\frac{4\Delta N_1\cos\phi^{f_L}_{2-step} - 4\Delta N_2\sin\phi^{f_L}_{2-step}}{16b}\right) \approx \frac{\Delta N_1\cos\phi^{f_L}_{2-step} - \Delta N_2\sin\phi^{f_L}_{2-step}}{4b} \tag{41}$$

式（41）中 ΔN_1 和 ΔN_2 的方差被表示为：

$$\begin{cases}\sigma^2_{\Delta N1} = 20\sigma^2 \\ \sigma^2_{\Delta N2} = 20\sigma^2\end{cases} \tag{42}$$

因此，两步相移法的包裹相位误差的方差为：

$$\sigma^2_{\Delta\phi-2step} = \frac{20\sigma^2\cos^2\phi + 20\sigma^2\sin^2\phi}{16b^2} = \frac{5\sigma^2}{4b^2} \tag{43}$$

式中：$\sigma^2_{\Delta\phi-2step}$ 也是 $4f_H+2f_M+2f_L$ 分层法中条纹频率为 f_L 的方差。

其次对于三频外差法，假设对条纹频率为 f_{H1}、f_{H2} 和 f_{H3}（$f_{H1}>f_{H2}>f_{H3}$）的条纹应用 $4f_{H1}+4f_{H2}+4f_{H3}$ 法求包裹相

位,因此条纹周期为 1 的包裹相位由两次外差得到。由于两个随机噪声图像之间的相关性约为 0,因此方差计算公式如下:

$$\begin{cases} Var(G_1 \pm G_2) = Var(G_1) + Var(G_2) \\ Var(G_1 G_2) = 0 \\ Var(G_1 G_1) = Var^2(G_1) \end{cases} \tag{44}$$

式中:G_i 代表随机高斯噪声,$i = 1,2$。

由于测量环境一致,假设各条纹的噪声方差近似相等,根据式(44)和三频外差原理图 2,条纹周期为 1 的包裹相位误差的方差为四步相移包裹相位误差的方差 $\sigma^2_{\Delta\phi-4step}$ 的 4 倍,代入式(38)的值可得:

$$\sigma^2_{\Delta\phi(1)} = \sigma^2_{\Delta\phi(H1-H2)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H2-H3)} = (\sigma^2_{\Delta\phi(H1)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H2)}) + (\sigma^2_{\Delta\phi(H2)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H3)}) = (\frac{2\sigma^2}{4b^2} + \frac{2\sigma^2}{4b^2}) + (\frac{2\sigma^2}{4b^2} + \frac{2\sigma^2}{4b^2}) = \frac{2\sigma^2}{b^2} \tag{45}$$

对于三频外差相移法 $4f_{H1}+2f_{H2}+2f_{H3}$,代入式(43)的值可求出条纹周期为 1 的包裹相位误差的方差为:

$$\sigma^2_{\Delta\phi(1)} = \sigma^2_{\Delta\phi(H1-H2)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H2-H3)} = (\sigma^2_{\Delta\phi(H1)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H2)}) + (\sigma^2_{\Delta\phi(H2)} + \sigma^2_{\Delta\phi(H3)}) = (\frac{2\sigma^2}{4b^2} + \frac{5\sigma^2}{4b^2}) + (\frac{5\sigma^2}{4b^2} + \frac{5\sigma^2}{4b^2}) = \frac{17\sigma^2}{4b^2} = \frac{4.25\sigma^2}{b^2} \tag{46}$$

在实际投影测量中,条纹频率的比值 f_M/f_L 要远大于包裹相位误差值 $\Delta\varphi_M$,故式(36)可以简写为:

$$\Delta k_N = \frac{f_M \Delta\varphi_L}{f_L} - \Delta\phi_M \approx \frac{f_M \Delta\varphi_L}{f_L} \tag{47}$$

因此,对于三频分层相移法 $4f_H+4f_M+4f_L$:

$$\Delta k_N \approx \frac{f_M}{f_L}\frac{2\sigma^2}{4b^2} \tag{48}$$

对于三频分层相移法 $4f_H+2f_M+2f_M$:

$$\Delta k_N \approx \frac{f_M}{f_L}\frac{5\sigma^2}{4b^2} \tag{49}$$

对于三频外差相移法 $4f_{H1}+4f_{H2}+4f_{H3}$:

$$\Delta k_N \approx \frac{f_M}{f_L}\frac{2\sigma^2}{b^2} \tag{50}$$

对于三频外差相移法 $4f_{H1}+2f_{H2}+2f_{H3}$:

$$\Delta k_N \approx \frac{f_M}{f_L}\frac{4.25\sigma^2}{b^2} \tag{51}$$

从表 1 可知,与 $4f+4f+4f$ 算法相比,$4f+2f+2f$ 算法虽然减少了条纹数量,但条纹周期为 1 的包裹相位误差的方差值成倍数增大,导致 Δk_N 不一定满足式(37)的条件,使条纹级数 k 发生变化而影响相位展开,故相位展开可靠度下降;对于 $4f+2f+2f$ 法,采用三频分层的方差要小于三频外差,所以说三频分层相位展开的可靠度优于三频外差。

表 1　条纹周期为 1 的包裹相位误差的方差

Table 1　Variance of wrapped phase error with fringe period 1

相位展开法	算法对比	方差值(σ^2/b^2)
分层法	$4f_H+4f_M+4f_L$	2/4
	$4f_H+2f_M+2f_L$	5/4
外差法	$4f_{H1}+4f_{H2}+4f_{H3}$	2
	$4f_{H1}+2f_{H2}+2f_{H3}$	4.5

2.6　相位融合

改进的双 N 步相移法融合相位只需对原始相移条纹和附加相移条纹的展开相位进行融合。本文对改进的双四步相移法的展开相位融合的步骤描述如下,根据式(1)和(20),分别设计一组 8 幅和一组 12 幅的理想光栅图,由相机将投影仪投射出的条纹捕捉并通过相移法求出两幅包裹相位图,利用上述的三频分层相位展开法对包裹相位展开可获得两幅相位展开图。对选取的 A4 平面做展开相位融合实验,图 3 为改进的双四步相移法融合展开相位过程的中间一行。

图 3(b)中点线为 8 幅原始光栅条纹图的展开相位 φ,长虚线为 12 幅附加相移条纹图的展开相位 φ^E,实线代表两幅展开相位图的融合结果 φ',x 轴代表像素位置,y 轴代表相位值。从图中可以明显看出,原始相移条纹与附加相移条纹之间因具有 π/4 的初始相位差导致周期性相位误差值处处相反。通过融合两组展开相位得到的结果证明相位误差被明显的削弱,得到了较高测量精度的相位信息。融合两幅展开相位的公式如下:

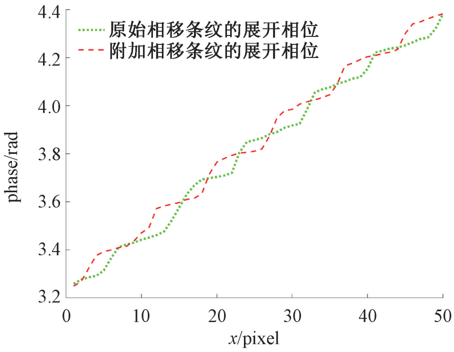
$$\varphi' = (\varphi + \varphi^E)/2 \tag{52}$$

3　实　验

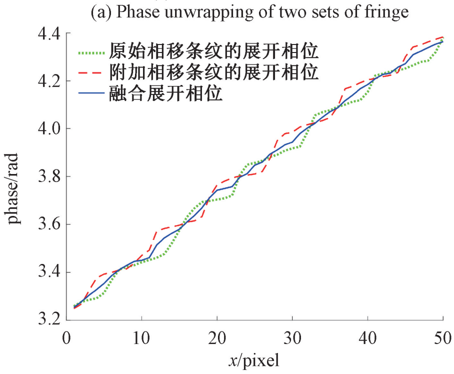
本文实验所用的结构光栅投影三维重建测量系统由实验室搭建,包括投影仪(型号:NP-M311W+),CCD 相机(型号:MV-CE050-30UC)和计算机。实验条纹由计算机生成后传送到投影仪并由投影仪投射到实验目标表面,CCD 相机捕捉含有相位信息的变形条纹并同时发送给计算机,然后计算机通过解码算法对变形条纹进行解相并提取实验目标的真实三维信息。

3.1　相位精度对比

为验证本文所提算法的相位测量精度,实验将本文所提方法与传统双四步相移法和单四步相移法做对比,以两种面具作为实验对象,3 种算法重建结果如图 4、5 所示。将两组实验各算法所得相位信息与利用 20 步相移算法得到的理想相位做差,得到各算法的相位误差值。在各算法的相位误差图中间位置取一块 101×101 pixel 像素点区域求均值误差,结果如表 2 所示。



(a) 两套条纹的展开相位
(a) Phase unwrapping of two sets of fringe



(b) 相位融合
(b) Phase combination

图 3　展开相位融合原理

Fig. 3　Principle of phase combination

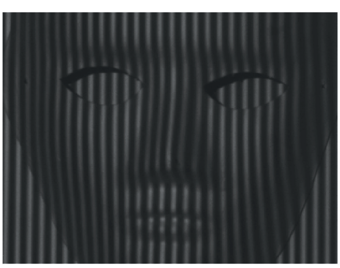
从表 2 中可知,改进的双四步相移法的最大相位误

表 2　相位误差取均值

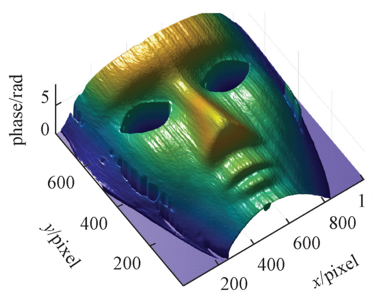
Table 2　Average phase error

算法	Largest error	Rmse
Double 4-step	0. 003 8	0. 008 484 2
Improve double 4-step	0. 003 8	0. 008 484 2
4-step	0. 010 2	0. 015 443

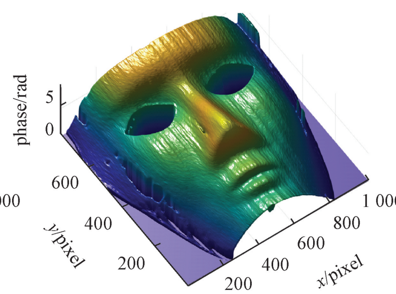
差和均方根误差与传统双四步相移法相等,且都要小于单四步相移法。在 3 种算法对面具的重建结果图 4、5 中可以看出,图 4(a)和图 5(a)为相机采集受面具调制的变形条纹,在传统双四步相移算法的重建结果图 4(b)和图 5(b)中,在非边缘和非阴影部分具有十分优异的重建结果,面部平滑无褶皱,与双 N 步相移法对非线性误差消除的理论分析相符。本文所提算法的重建结果图 4(c)和图 5(c)与传统双 N 步相移算法的重建结果基本一致,对面具的测量精度极高,所提算法因删减了部分条纹使得重建结果受到略微影响,对非线性误差具有出色的削弱能力。单四步相移算法的重建结果图 4(d)和图 5(d)中含有微小的周期性水痕,符合单四步相移法的非线性误差分布。图 4(e)和图 5(e)为 3 种算法的第 384 行相位比较结果,可明显看出改进的双四步相移法与传统双四步相移法的相位有重合现象,进一步证实了改进算法的高测量精度。在实际测量中,改进的双 N 步相移算法相较于传统的双 N 步相移算法具有相同精确的相位测量性能,并进一步提升了测量效率。



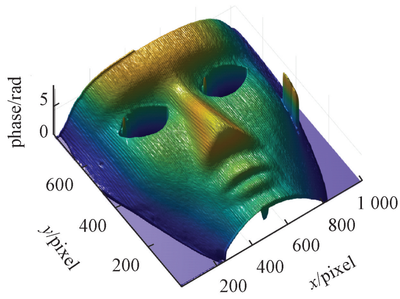
(a) 变形条纹
(a) Deformed fringe



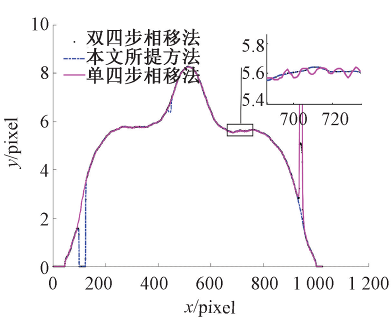
(b) 双四步相移法
(b) Double four-step phase-shiftmethod



(c) 本文所提方法
(c) The proposed method



(d) 单四步相移法
(d) Single four-step phase-shift method

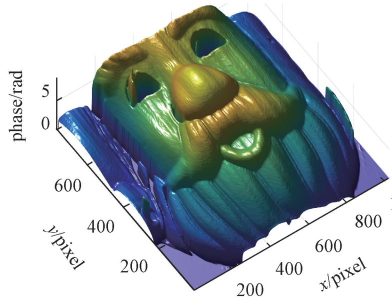


(e) 3种算法第384行相位比较
(e) Phase comparison of line 384 of three algorithms

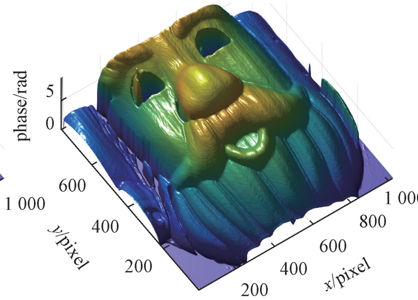
图 4　第 1 组 3 种算法的重建结果

Fig. 4　Reconstruction results of the first group of three algorithms

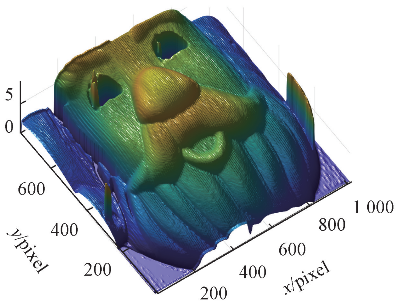
(a) 变形条纹
(a) Deformed fringe



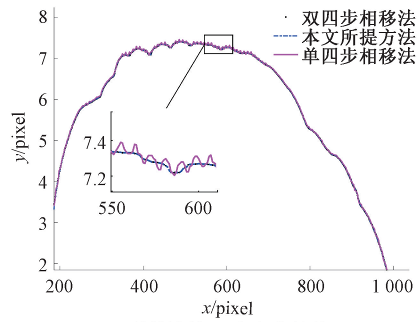
(b) 双四步相移法
(b) Double four-step phase-shiftmethod



(c) 本文所提方法
(c) The proposed method



(d) 单四步相移法
(d) Single four-step phase-shift method



(e) 3种算法第384行相位比较
(e) Phase comparison of line 384 of three algorithms

图 5　第 2 组 3 种算法的重建结果

Fig. 5　Reconstruction results of the second group of three algorithms

3.2　相位展开法对比

对比空间相位展开法和时间相位展开法，空间相位展开法对于连续性物体的测量具有高精度且直接的特点，但对于孤立对象或不连续物体空间相位展开法在对像素点解相时易将相位误差进行扩散，具有一定局限性。而时间相位展开法展开不连续性和分离的轮廓的相位时对每个像素点都是独立于其邻域展开的，不会对其他区域引入扩散误差[16-17]。本文选用时间相位展开法中的三频分层相位展开法和三频外差法，将两者的相位展开结果做对比。

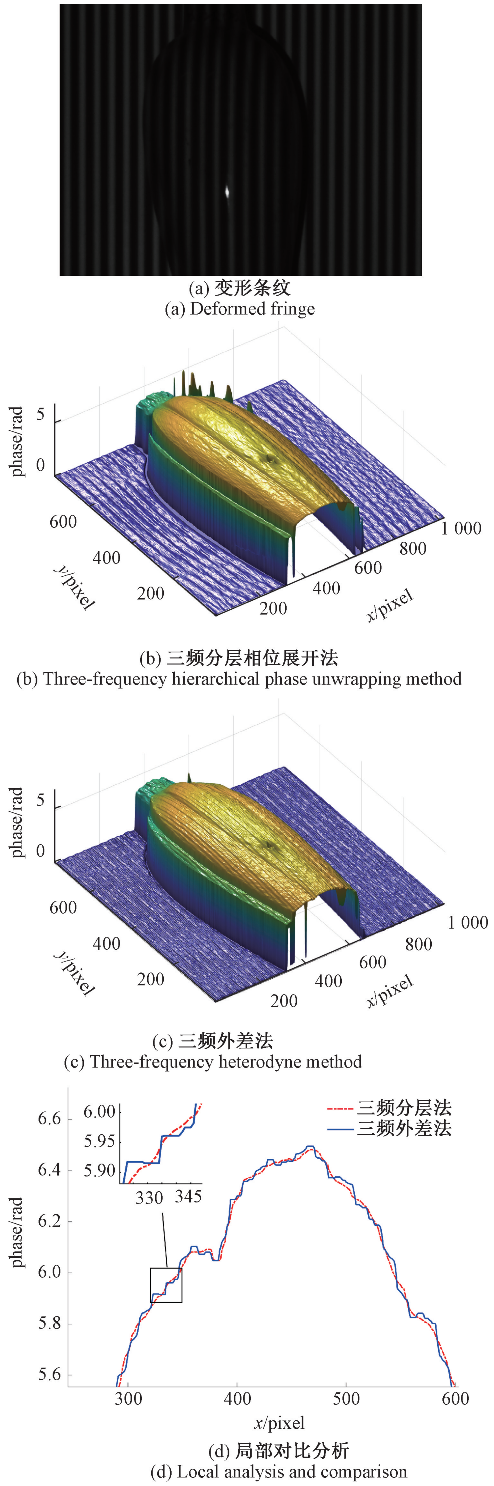
以瓷瓶作为实验对象，包裹相位都应用改进的双 N 步相移算法求得，使用三频分层相位展开法展开相位的条纹频率设置为 1,8,64，使用三频外差法展开相位的条纹频率设置为 56,64,73，结果如图 6。图 6(a) 为受实验对象调制的变形条纹，图 6(b) 和(c) 分别为三频分层相位展开法和三频外差法对瓷瓶的重建结果。为了更明确地对比两算法的展开结果，分别取像素第 384 行相位进行分析，结果如图 6(d) 所示。可明显看出，三频分层相位展开法的展开相位平滑且无波动变化，而三频外差展开法的展开相位波动性误差较多，褶皱现象明显。

4　结　论

针对传统双 N 步相移法测量时间长的问题提出了一种改进的双 N 步相移法。本文所提方法对原始相移条纹数目删减来求出包裹相位，然后通过三频时间相位展开法对原始相移条纹和附加相移条纹分别进行相位展开，再融合两幅展开相位图对相位误差进行消除。本文从相移法的理论分析着手，对常用单 N 步相移法的相位误差进行推导，并对双 N 步相移算法的误差消除原理进行了理论分析。通过实验验证了所提算法具有与传统双 N 步相移法几乎相同的测量精度，同时将测量效率提升了 16.7%。通过实验验证了三频分层相位展开法对相位展开的可靠性要优于三频外差法，并对三频外差法删减条纹后相位展开可靠性下降进行了理论分析。

参考文献

[1]　WANG Z Y, ZHANG Z H, GAO N, et al. Single-shot 3D shape measurement of discontinuous objects based on coaxial fringe projection system [J]. Applied Optics, 2019, 58(5): 169-178.



(a) 变形条纹
(a) Deformed fringe

(b) 三频分层相位展开法
(b) Three-frequency hierarchical phase unwrapping method

(c) 三频外差法
(c) Three-frequency heterodyne method

(d) 局部对比分析
(d) Local analysis and comparison

图 6　两种算法的相位展开结果
Fig. 6　Phase unwrapping results of two algorithms

[2] 左超，张晓磊，胡岩，等. 3D 真的来了吗？：三维结构光传感器漫谈[J]. 红外与激光工程，2020，49(3)：9-53.
ZUO CH, ZHANG X L, HU Y, et al. Has 3D finally come of age?: An introduction to 3D structured-light sensor[J]. Infrared and Laser Engineering, 2020, 49(3): 9-53.

[3] 王希波，李爱娟，高金胜，等. 基于机器视觉的轮胎花纹深度测量系统研究[J]. 国外电子测量技术，2019，38(4)：66-70.
WANG X B, LI AI J, GAO J SH, et al. Research on tire tread depth measurement system based on machine vision[J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2019, 38(4): 66-70.

[4] 吴付峰，李�，杨海马，等. 基于线结构光路面车辙检测系统研究[J]. 电子测量技术，2019，42(23)：132-136.
WU F F, LI J, YANG H M, et al. Research on rutting detection system based on linear structure light pavement[J]. Electronic Measurement Technology, 2019, 42(23): 132-136.

[5] 王建华，周玉国，杨延西. 基于相位误差自校正的高速三维测量技术[J]. 电子测量与仪器学报，2019，33(12)：116-125.
WANG J H, ZHOU Y G, YANG Y X. High-speed three-dimensional measurement technique based on phase error self correction [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2019, 33(12): 116-125.

[6] 张申华，杨延西. 一种针对投影仪 gamma 效应的相位误差补偿方法[J]. 仪器仪表学报，2019，40(11)：1-8.
ZHANG SH H, YANG Y X. A phase error compensation method for the gamma effect of projector[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019, 40(11): 1-8.

[7] CAI Z W, LIU X L, JIANG H, et al. Flexible phase error compensation based on Hilbert transform in phase shifting profilometry [J]. Optics Express, 2015, 23(19):25171-25181.

[8] ZHANG S, YAU S T. Generic nonsinusoidal phase error correction for three-dimensional shape measurement using a digital video projector[J]. Applied Optics, 2007, 46(1): 36-43.

[9] PAN B, KEMAO Q, HUANG L, et al. Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry[J]. Optics Letter, 2009, 34(4):416-418.

[10] ZHANG S, YAU S T. High-speed three-dimensional shape measurement system using a modified two-plus-one phase-shifting algorithm[J]. Optical Engineering, 2007,

46(11): 113603.

[11] ZUO C, CHEN Q, GU G, et al. High-speed three-dimensional shape measurement for dynamic scenes using bi-frequency tripolar pulse-width-modulation fringe projection[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2013, 51(8): 953-960.

[12] ZUO C, CHEN Q, GU G, et al. High-speed three-dimensional profilometry for multiple objects with complex shapes [J]. Optics Express, 2012, 20 (17): 19493-19510.

[13] HUANG P S, HU Q J, CHIANG F P. Double three-step phase-shifting algorithm [J]. Applied Optics, 2002, 41(22): 4503-4509.

[14] 李中伟. 基于数字光栅投影的结构光三维测量技术与系统研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2009.
LI ZH W. Research on structured light 3D measuring technology and system based on digital fringe projection[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2009.

[15] ZUO C, FENG S J, HUANG L, et al. Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2018, 109: 23-59.

[16] SERVIN M, PADILLA J M, GONZALEZ A, et al. Temporal phase-unwrapping of static surfaces with 2-sensitivity fringe-patterns [J]. Optics Express, 2015, 23(12): 15806-15815.

[17] HYUN J S, ZHANG S. Enhanced two-frequency phase-shifting method[J]. Applied Optics, 2016, 55(16): 4395-4401.

作者简介

徐鹏,2021 年于山东工商学院获得学士学位,现为青岛理工大学硕士研究生,主要研究方向为光学三维测量。

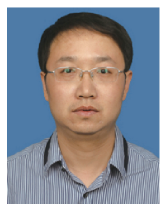
E-mail: xupeng2021ting@163.com

Xu Peng received his B. Sc. degree in 2021 from Shandong Technology and Business University. Now he is a M. Sc. candidate at Qingdao University of Technology. His main research interest includes optical 3D measurement.

刘锦涛,2020 年于南阳师范学院获得学士学位,现在为青岛理工大学硕士研究生,主要研究方向为光学三维测量。

E-mail: liujintao202204@163.com

Liu Jintao received his B. Sc. degree in 2020 from Nanyang Normal University. Now he is a M. Sc. candidate at Qingdao University of Technology. His main research interest includes optical 3D measurement.



王建华(通信作者),2004 年于中国地质大学获得学士学位,2011 年于中国矿业大学获得硕士学位,2019 年于西安理工大学获得博士学位。现为青岛理工大学副教授,主要研究方向为光学三维测量和自动化控制。

E-mail: wjh051130@163.com

Wang Jianhua (Corresponding author) received his B. Sc. degree in 2004 from China University of Geosciences, received his M. Sc. degree in 2011 from China University of Mining and Technology, received his Ph. D. degree in 2019 from Xi′an University of Technology. Now he is an associate professor in Qingdao University of Technology. His research interests include optical 3D measurement and automation control.