四轮转向系统非脆弱控制器设计

程权成
(辽宁机电职业技术学院 华孚仪表学院 丹东 118009)

摘　要: 以四轮转向系统为研究对象,引入 H_∞ 控制理论,设计了一种四轮转向系统非脆弱控制器存在的线性矩阵不等式(LMI)条件。通过 H_∞ 控制理论有效地抑制外部扰动对系统的干扰,利用Lyapunov函数方法以及矩阵不等式变换技术,将研究系统的控制器存在条件以矩阵不等式的形式给出。与现有的控制器设计方法相比,充分考虑了控制器存在的不确定性摄动,即非脆弱控制问题。最后,通过MATLAB仿真软件对所推导得出的控制器不等式存在条件进行验证,进一步证明了提出方法的有效性。

关键词: 非脆弱控制器;线性矩阵不等式(LMI);Lyapunov函数
中图分类号: TN06　　**文献标识码:** A　　**国家标准学科分类代码:** 120.3040

Design of the four wheel steering system non-fragile controller

Cheng Quancheng
(Huafu Instrument College, Liaoning Mechatronics College, Dandong 118009, China)

Abstract: According to the system of four wheel steering, a non-fragile controller is designed via theory of H_∞ control and linear matrix inequality (LMI) method in this thesis. The external disturbance can be suppressed effectively by H_∞ control theory. Then, by using Lyapunov function method and matrix inequality converter technique, the sufficient condition of controller is obtained via LMI method. Comparing with the existing research method of controller, the problem of non-fragile that controller has uncertainties are consider in this paper. Finally, the MATLAB simulation experiment shows the validity of the proposed linear matrix inequality of controller.

Keywords: non-fragile controller; linear matrix inequality (LMI); Lyapunov function

1　引　言

四轮转向系统作为汽车控制中的重要技术部分,近年来在控制领域受到了广泛的关注。四轮转向技术是指汽车进行侧向运动和横摆运动的控制时,将后轮引入到转向控制中。四轮转向系统在汽车低速转向时,可有效提高机动灵活性,在高速转向时,可有效提高操纵稳定性[1]。文献[2]中,针对汽车四轮转向系统采用三自由度模型进行了研究并运用了鲁棒控制中的 H_∞ 控制理论。在文献[3]中,关于四轮转向系统的控制方法研究采用了模型跟踪自适应控制理论,提出一种基于模型跟踪自适应控制技术的四轮转向系统控制。文献[4]中,通过对机场牵引汽车四轮转向控制系统的研究,提出一种在随动轮角度跟随基础上,引入汽车行驶速度控制因子的控制方法,得到了较好的控制效果。

另一方面,在控制系统的设计过程中,Lyapunov函数稳定性理论以及线性矩阵不等式技术因其有效性[5-7],得到广泛关注。通过MATLAB软件中的LMI工具箱可有效处理控制系统设计中的线性矩阵不等式的求解问题[8-9]。鉴于上述分析,本文针对四轮转向系统的控制问题,提出一种考虑控制器中存在不确定摄动的非脆弱控制器求解设计方法。该设计过程充分利用了矩阵不等式变换技术、H_∞ 控制理论以及Lyapunov函数方法,将四轮转向系统的控制器存在条件以矩阵不等式的形式给出。最后,通过MATLAB软件对所设计方法的有效性进行数值仿真验证。

2　问题描述

本节选取的四轮转向系统状态方程如式(1)所示,将针对该系统方程设计实现系统 H_∞ 控制的控制器形式[10]。

收稿日期: 2017-01

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{\omega}(t) \tag{1}$$

式中：$x(t)=[\beta \quad r]^{\mathrm{T}}$ 为四轮转向系统的状态变量，β 为车体中心处的侧偏角，r 为横摆角速度；$\boldsymbol{u}(t)$ 为系统的控制变量输入，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 系统的外部干扰。这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2(C_f+C_r)}{mv} & \dfrac{2(l_f^2C_f-l_r^2C_r-c_2C_rv^2)+mv^2}{mv^2}\\ -\dfrac{2(l_fC_f-l_rC_r)}{I_z} & -\dfrac{2(l_f^2C_f+l_r^2C_r+c_2C_rl_rv^2)}{I_zv}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{2(C_f-c_1C_r)}{mv}\\ \dfrac{2(l_fC_f+c_1l_rC_r)}{I_z}\end{bmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{0.6mv}{I_z}\end{bmatrix},$$

式中：C_f 和 C_r 为角钢度系数，m 为汽车的质量，v 为汽车的行驶速度，l_f 为汽车重心到前轴的距离，l_r 为汽车重心到后轴的距离，I_Z 为汽车绕重心的转动惯量，c_1 和 c_2 为转向角参数。

为处理本文所提出的四轮转向系统的设计问题，选取控制器模型如式(2)所示，与已有的控制器模型相比，这里考虑了控制器存在的不确定性摄动现象，即非脆弱控制问题。

$$\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{K}$ 为需要设计控制器增益。$\Delta\boldsymbol{K}$ 为控制器中的存在的参数不确定性摄动变量，且具有形式 $\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}_K\boldsymbol{N}$，其中，$M,N$ 为已知的定常矩阵，Δ 为时变矩阵参数，且满足 $\boldsymbol{\Delta}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_K\leqslant\boldsymbol{I}$[11]。

为实现四轮转向系统的 H_∞ 控制，引入性能评价信号为：

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}(t) \tag{3}$$

综合式(1)～(3)，经过简单的数学处理后可得到四轮转向系统的闭环模型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}(t)\end{cases} \tag{4}$$

本文的目的是在考虑非脆弱控制的情况下，设计 H_∞ 控制器增益 $\boldsymbol{K}$，使其满足对于 $\gamma>0$，有不等式关系[12]：

$$\int_0^\infty \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t<\gamma^2\int_0^\infty \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

下面的两个引理在本文结论的推导过程中起到了重要作用。

引理 1[11] 对于给定对称矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22}\end{bmatrix}$，那么下述两个条件等价：

1) $\boldsymbol{S}<0$；

2) $\boldsymbol{S}_{22}<0,\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{S}_{21}<0$。

引理 2[11] 对于给定适当维数的实矩阵 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H},\boldsymbol{E},\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\leqslant\boldsymbol{I}$，那么可以得出结论，存在常数 $\varepsilon>0$，使其满足下面的不等式关系：

$$\boldsymbol{W}+\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{W}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$$

3 非脆弱控制器设计

下面通过线性矩阵不等式方法，设计考虑非脆弱问题的四轮转向系统控制器存在形式。

定理 1 对于式(4)所示的四轮转向闭环系统(4)，对于给定的 H_∞ 控制性能参数 $\gamma>0$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{Y}$ 以及正常数 ε，使得下述矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BY}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & * & * & * & *\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2\boldsymbol{I} & * & * & *\\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DY} & \boldsymbol{F} & -\boldsymbol{I} & * & *\\ \varepsilon\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\varepsilon\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{NX} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

那么式(4)所示的四轮转向系统的闭环模型的 H_∞ 控制性能指标能够满足，并且控制器参数增益为 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}$。

证明：为了推导定理1所论述的不等式条件，定义形式如式(7)的 Lyapunov 函数。

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t),P>0 \tag{7}$$

对定义的 Lyapunov 函数关系式(7)等式求导数可得到关系式(8)。

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{8}$$

结合 H_∞ 控制性能指标，若不等式(9)成立，

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)<0 \tag{9}$$

那么则有：

$$V(x(\infty))-V(x(0))+\int_0^\infty \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t-\gamma^2\int_0^\infty \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t<0 \tag{10}$$

由于 $V(x(\infty))>0$，考虑零初始条件下，则有 $V(x(0))=0$，因此，式(4)所示的系统闭环模型的 H_∞ 控制性能指标能够保证。故若要保证系统的 H_∞ 控制性能则需保证不等式(9)成立。将四轮转向系统的闭环模型带入式(9)中，则：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Gamma}+\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})+(\boldsymbol{K}+\Delta K)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{PE}\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}) \quad \boldsymbol{F}]$。

若要使不等式(11)成立，则只需：

$$\boldsymbol{\Gamma}+\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}<0 \tag{12}$$

对不等式(12)运用引理1，然后左右分别乘以 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1}, \quad \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{I}\}$，定义 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{KX}$ 便可得到不等式(13)。

$$\boldsymbol{\Phi}+(\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Xi})+(\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}}<0 \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BY}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & * & *\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DY} & \boldsymbol{F} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{BM}\\0\\\boldsymbol{DM}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Xi}=[\boldsymbol{NX}\quad 0\quad 0]$$

对矩阵不等式(13)先后运用引理2和引理1的条件，便可以得到定理1所描述的矩阵不等式条件。定理1证毕。

4 仿真实例

为进一步证明本文所提出控制器求解方法的有效性，这里选取四轮转向系统的参数如下[10]：

$m=1\ 640\ \mathrm{kg}, v=28\ \mathrm{m/s}, I_Z=2\ 720\ \mathrm{kg\cdot m^2}$,

$l_f=1.105\ \mathrm{m}, l_r=1.345\ \mathrm{m}, c_1=1, c_2=0.027\ 3$,

$C_f=33\ 020\ \mathrm{N/rad}, C_r=55\ 830\ \mathrm{N/rad}$。

这里，假定控制器中存在不确定性摄动参数为 $\boldsymbol{M}=[-0.05\quad -0.5]$，$N=0.2$，通过MATLAB LMI工具箱求解定理1中的控制器存在矩阵不等式条件，当 $\gamma^2=0.8$ 时，求得控制器增益参数为：

$\boldsymbol{K}=[2.165\ 4\quad -1.549\ 3]$

通过MATLAB软件的simulink仿真功能对四轮转向系统模型进行仿真实验，可得到图1所示的车体侧偏角响应曲线和图2所示的横摆角速度响应曲线，通过曲线可以看出系统的状态参数趋于稳定，因此可以说明，本文定理1所给出的控制器设计方法的有效性。

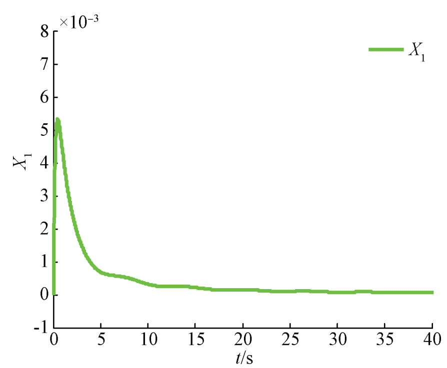

图1 车体侧偏角响应曲线

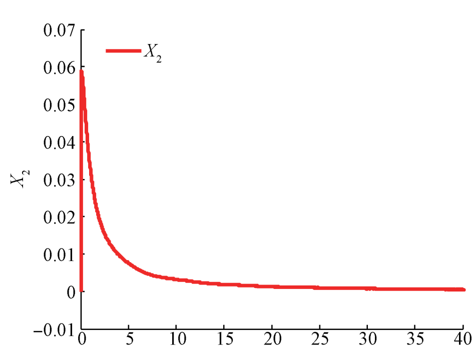

图2 横摆角速度响应曲线

5 结 论

本文主要研究了四轮转向系统的非脆弱控制器设计问题。控制器的设计过程中，考虑控制器中参数不确定性摄动的存在，通过线性矩阵不等式(LMI)技术和Lyapunov函数方法，结合 H_∞ 控制理论，将非脆弱控制器设计条件以矩阵不等式的形式给出，利用MATLAB软件LMI工具箱求解出控制器增益参数。最后，通过四轮转向系统的实例参数证明了所提出的方法可有效性。

参 考 文 献

[1] 杜峰，魏朗，李玉民. 模型跟踪四轮主动转向汽车的 H_∞ 控制[J]. 郑州大学学报：工学版，2007，28(3)：112-116.

[2] 张伯俊，陈广彦. 三自由度汽车四轮转向系统的 H_∞ 控制设计[J]. 天津工程师范学院学报，2006，16(2)：8-11.

[3] 杜太行，张勇，董志然. 四轮转向汽车的模型跟踪自适应控制[J]. 河北工业大学学报，2008，37(4)：1-6.

[4] 党涛. 四轮转向技术在牵引汽车中的应用[J]. 汽车实用技术，2014(11)：78-79，95.

[5] 林旭梅，王婵. 四旋翼飞行器的自适应鲁棒滑模控制器设计[J]. 仪器仪表学报，2015，36(7)：1522-1528.

[6] GAO J SH，DENG L W，SONG SH M. Fractional order nonsingular terminal sliding mode control for flexible spacecraft attitude tracking[J]. Instrumentation，2016，3(1)：21-29.

[7] 高超，钱伟. 广域时滞电力系统控制器的优化算法及其应用[J]. 电子测量技术，2016，39(5)：70-74.

[8] 王慧，张晓曼，宋宇宁. MATLAB求解电液伺服阀的流量特性曲线[J]. 电子测量与仪器学报，2015，29(8)：1236-1244.

[9] 方辉. 基于LMI的两轮自平衡机器人控制器设计[J]. 黑龙江科技大学学报，2015，25(3)：340-342.

[10] 王洪礼，李胜朋，高强. 基于ARM处理器的汽车四轮转向 H_∞ 控制器的实现[J]. 天津大学学报，2007，40(1)：58-61.

[11] 程权成，常晓恒. T-S模糊系统非脆弱跟踪控制器设计[J]. 电子设计工程，2014，9(3)：1-4.

[12] 方辉，程权成. 离散系统量化 $H_{\_infinity}$ 控制器设计[J]. 国外电子测量技术，2016，10(35)：12-15.

作 者 简 介

程权成，1989年出生，助理工程师，硕士，主要研究方向为控制理论与算法。

E-mail：chengquancheng@163.com