

# 基于蒙特卡洛法的微波功率测量不确定度评定

王瑞宝

(中国人民解放军 92571 部队 三亚 572021)

**摘要:** 利用蒙特卡洛法对微波功率测量不确定度进行评定。介绍了蒙特卡洛法评定测量不确定度的过程,给出了基于 MATLAB 实现蒙特卡洛法评定的步骤。分别使用单批次蒙特卡洛法和自适应蒙特卡洛法评定给定频率下微波功率测量不确定度,并与 GUM 法结果进行比较和验证。结果表明除标准不确定度值蒙特卡洛法和 GUM 法相差 5% 外,其他结果几乎一致,蒙特卡洛法验证了 GUM 法,完全适合微波功率测量不确定度评定。蒙特卡洛法能处理线性模型,在各不确定度分量相差较大情况下优势明显,同时简单、方便,易于推广。

**关键词:** 蒙特卡洛法; GUM 法; 测量不确定度; 微波功率; MATLAB

**中图分类号:** TB9 TN98      **文献标识码:** A      **国家标准学科分类代码:** 410.55

## Evaluation of measurement uncertainty of microwave power based on Monte Carlo method

Wang Ruibao

(Unit 92571 of the People's Liberation Army, Sanya 572021, China)

**Abstract:** The measurement uncertainty of microwave power was evaluated by Monte Carlo method (MCM). The evaluation process of measurement uncertainty was introduced with MCM, and procedure of MCM with MATLAB was given. Both single batch MCM and adaptive MCM method were used to evaluate measurement uncertainty of microwave power at a given frequency. The results from two MCM were compared with GUM method. It showed that the results were almost identical, addition to 5% deviation in standard uncertainty between MCM and GUM. The MCM validated GUM and was fully fit for evaluation measurement uncertainty of microwave power. The MCM can deal with linear model perfectly, and its advantage is obvious in the case of similar components of uncertainty, and it is simple, convenient, and easy to spread at same time.

**Keywords:** Monte Carlo method; GUM method; measurement uncertainty; microwave power; MATLAB

### 1 引言

由于真值的理想性,测量结果分散在包含真值的一定范围内,该范围即为测量结果的不确定度。ISO 发布了《测量不确定度表示指南—1995》(简称 GUM 法)后, GUM 法成为国际上测量不确定度评定的普遍方法。GUM 法解决了许多问题,但也存在局限之处,如模型非线性不能太显著,各不确定度分量大小不能相差过大,泰勒级数高阶项需要近似等,因此需要一种新的方法对 GUM 法进行补充。国际计量联合指导委员会推荐利用蒙特卡洛法(MCM)进行不确定度评定,我国也发布了配套规范 JJF—1059. 2《用蒙特卡罗法评定测量不确定

度》<sup>[1-2]</sup>。MCM 特别适用于测量模型明显非线性情况,和各不确定度分量大小不相近等情况,能够有效解决 GUM 法遇到的困难,扩大了不确定度评定范围,而且能够对 GUM 法是否适用进行验证。

### 2 MCM 评定测量不确定度

蒙特卡洛法(monte carlo method, MCM)是一种模拟统计数值方法,其基本思想是建立一个概率空间,所求问题的解是空间上某一事情的概率,通过建立模型并对模型抽样试验来计算该事件发生的概率和随机变量的数学期望。当试验次数足够大时,根据大数定律和中心极限定理即可用频率代替概率,用算术平均值代替数学期望,问题得到解决<sup>[3]</sup>。

MCM 是一种抽样技术,能够解决随机变量问题,因而可以应用于输入量为随机变量的测量不确定度评定问题。MCM 通过建立数学模型以分布传播的方式传播各个输入量的概率密度函数(PDF)获得输出量 PDF,通过输出量 PDF 的期望、标准偏差获得输出量的估计值、标准不确定度和规定包含概率下输出量的包含区间<sup>[1-6]</sup>。

MCM 试验次数是一个关键参数,既要足够大,又要符合实际。试验次数的不同派生出 2 种不同 MCM 评定方法,一种是单批次 MCM 评定。另一种是自适应 MCM 评定;2 种方法都可以依靠 MATLAB 实现,下面具体说明。

### 2.1 单批次 MCM 评定测量不确定度过程

评定过程分为 MCM 输入、MCM 传播、MCM 输出和报告结果 4 个阶段,如图 1 所示。

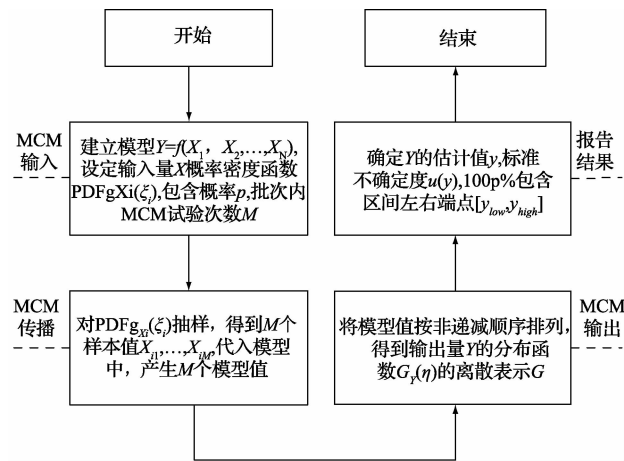


图 1 单批次 MCM 评定测量不确定度过程

根据测量原理建立测量模型,基于获得的信息,为  $X_i$  设定 PDF。为保证 95% 包含概率,试验次数  $M$  一般等于  $10^6$ 。按照设定分布抽样,得到  $M$  个样本值,代入模型,得到  $M$  个模型值。将模型值按照非递减顺序排列,得到输出量  $Y$  的分布函数  $G_Y(\eta)$  的离散表示  $G$ 。通过  $G$  得到测量不确定度的报告结果:  $Y$  估计值、标准不确定度和包含概率  $p$  时的包含区间  $[y_{low}, y_{high}]$ <sup>[7]</sup>。

### 2.2 自适应 MCM 评定测量不确定度过程

单批次 MCM 试验次数为  $M$ ,为了获得足够可靠的评定结果, $M$  应足够大。但测量过程中随机参数的特性会对  $M$  值有影响,因此不同测量可能会需要不同  $M$  值。为了克服  $M$  固定带来的弊病,可采用自适应 MCM。自适应 MCM 实际是一种贯续批处理方法,即根据统计稳定性判断条件,决定试验需要的批次次数  $h$ <sup>[7]</sup>。每批次内进行  $M$  次试验,达到统计稳定后通过全部  $h \times M$  次模型值得到结果。自适应 MCM 评定测量不确定度过程如图 2 所示。从图 2 可看出,需要设定  $n_{dig}$  和批次内运行次数  $M$ ,  $M$  一般等于 10 000。设定完毕开始试验,首先执行  $h=1$  和  $h=2$  时批次内  $M$  次 MCM 评定子程序,即图 1 所示过程。每批次试验后,需计算估计值、标准不确定度、包含区间左右端点标准偏差<sup>[7]</sup>:

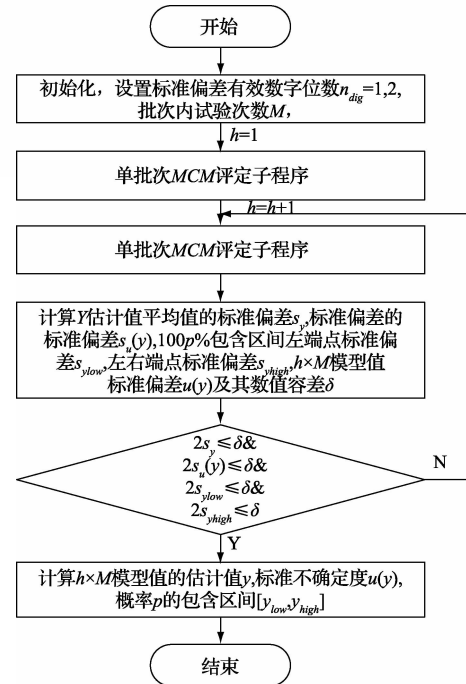


图 2 自适应 MCM 评定测量不确定度过程

$$s_y(h) = \sqrt{\frac{1}{h(h-1)} \sum_{i=1}^h (y^{(i)} - y(h))^2} \quad (1)$$

$$s_{u(y)}(h) = \sqrt{\frac{1}{h(h-1)} \sum_{i=1}^h (u(y^{(i)}) - u_y(h))^2} \quad (2)$$

$$s_{y_{low}}(h) = \sqrt{\frac{1}{h(h-1)} \sum_{i=1}^h (y_{low}^{(i)} - y_{low}(h))^2} \quad (3)$$

$$s_{y_{high}}(h) = \sqrt{\frac{1}{h(h-1)} \sum_{i=1}^h (y_{high}^{(i)} - y_{high}(h))^2} \quad (4)$$

利用全部  $2 \times M$  个模型值计算  $Y$  估计值的标准不确定度  $u(y)$  的数值容差  $\delta$ ,如果式(1)~(4)所有值都小于  $\delta$ ,即满足统计稳定性条件,则通过  $2 \times M$  个模型值计算得到  $y, u(y)$  和 100p% 包含区间,评定结束。如果不满足条件,则  $h$  增加 1,返回再进行 MCM 试验,按照式(1)~(4)重新计算,再判断是否满足条件,依次循环,直到第  $h$  批次 MCM 试验后四值都满足条件为止,此时计算达到统计稳定。最后利用已获得的全部  $h \times M$  个模型值计算得到  $y, u(y)$  和 100p% 包含区间。

### 2.3 基于 MATLAB 的 MCM 实现

MATLAB 是具有强大数据计算能力、图形处理能力,可编程软件<sup>[8]</sup>。它带有统计工具箱,能够按照要求生成所需概率分布随机数并进行抽样和计算,非常适合 MCM。下面说明使用 MATLAB 实现自适应 MCM 不确定度评定步骤。

#### 1) 初始设置

包括清除工作空间变量,随机数发生器置零,设定批次内  $M$  等。使用 clear, randn('state',0), rand('state',0)等命令。

## 2) 随机数生成、抽样和模型值计算

根据测量模型输入量概率分布,生成相应随机数并抽样,计算模型值,需要进行2批次。主要用到各种随机数发生函数。

## 3) 统计稳定性条件的计算与判定

计算  $2 \times M$  个模型值  $2s_y(2)$ ,  $2s_{u(y)}(2)$ ,  $2s_{y,low}(2)$  和  $2s_{y,high}(2)$ , 判定是否满足统计稳定条件,满足则给出结果,否则进行下一批试验,直至满足为止。主要使用 mean, std, partile 等命令。

## 4) 报告结果

据全部  $h \times M$  模型值,计算输出量估计值、标准偏差和包含区间左右端点,绘制直方图并标志左右端点。主要用到 mean, std, partile, sort, find, hist, line 等命令。

## 3 微波功率测量不确定度评定

分别使用基于 MATLAB 的单批次 MCM 和自适应 MCM 对给定频率下 1 mW 微波功率测量不确定度进行评定,与 GUM 法结果进行比较,并对其验证。

相同测量条件下使用微波功率计 ML2438A,连续6次测量扫频信号发生器 AV1487 在 9 GHz 时输出 1 mW 微波功率,算术平均值和实验标准偏差分别为 1.017 mW 和 0.005 2 mW。

考虑到功率计功率指示器准确度、噪声、功率指示器参考功率误差等因素对测量结果的影响,测量模型可表示为:

$$P = P_X + \delta P_A + \delta P_N + \delta P_I + \delta P_R + \delta P_T + \delta P_C + \delta P_M \quad (5)$$

式中:  $P$  为被检信号发生器功率,  $P_X$  为功率计测量值,  $\delta P_A$  为功率指示器准确度对被测功率的影响,  $\delta P_N$  为功率计噪声的影响,  $\delta P_I$  为功率指示器 1 mW 参考功率误差的影响,  $\delta P_R$  为功率计分辨率的影响,  $\delta P_T$  为温度的影响,  $\delta P_C$  为校准因子的影响,  $\delta P_M$  为失配的影响。

## 3.1 MCM 法

使用 MATLAB 软件实现 MCM 评定。各输入量设定的概率分布及特征值如表 1 所示。

表 1 测量 1 mW 微波功率时各输入量概率分布不确定度分量值

| 输入量          | $\bar{x}$ | $\mu$                 | $a$      | $b$     | 不确定度分量   | 服从概率分布 |
|--------------|-----------|-----------------------|----------|---------|----------|--------|
| $P_X$        | 1.017     | $4.51 \times 10^{-6}$ | —        | —       | 0.002 1  | 正态     |
| $\delta P_A$ | —         | —                     | -0.005   | 0.005   | 0.002 9  | 均匀     |
| $\delta P_N$ | —         | —                     | -0.005   | 0.005   | 0.002 9  | 均匀     |
| $\delta P_I$ | —         | —                     | -0.012   | 0.012   | 0.006 9  | 均匀     |
| $\delta P_R$ | —         | —                     | -0.000 5 | 0.000 5 | 0.000 29 | 均匀     |
| $\delta P_T$ | —         | —                     | -0.010   | 0.010   | 0.005 8  | 均匀     |
| $\delta P_C$ | —         | —                     | -0.018 9 | 0.018 9 | 0.010 9  | 均匀     |
| $\delta P_M$ | —         | —                     | -0.005 3 | 0.005 3 | 0.003 7  | 反正弦    |

## 3.1.1 单批次 MCM

设  $M=1\,000\,000$ , MATLAB 程序运行后结果显示,输出量估计值、标准不确定度、95% 包含区间左右端点分别为 1.017 0、0.016 1、0.986 1、1.048 0。生成微波功率值概率分布直方图如图 3 所示。左右两条直线分别对应 95% 包含区间左右端点。

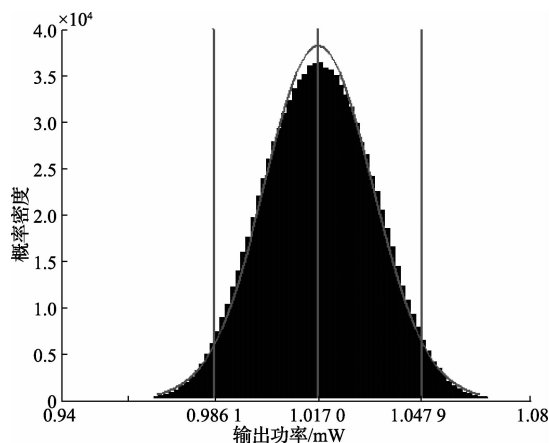


图 3 1 mW 微波功率单批次 MCM 概率分布

## 3.1.2 自适应 MCM

设  $ndig=2$ , 批次内运行次数  $M=10\,000$ , 程序稳定后得到:

批次数  $h=3$ , 试验次数为  $h \times M=30\,000$ , 数值容差  $\delta=5.0 \times 10^{-4}$ , 输出量  $Y$  估计值、标准不确定度、95% 包含区间左右端点分别为 1.017 1、0.016 1、0.986 2、1.047 9。生成的微波功率值概率分布直方图如图 4 所示,左右两条直线内为 95% 包含区间。

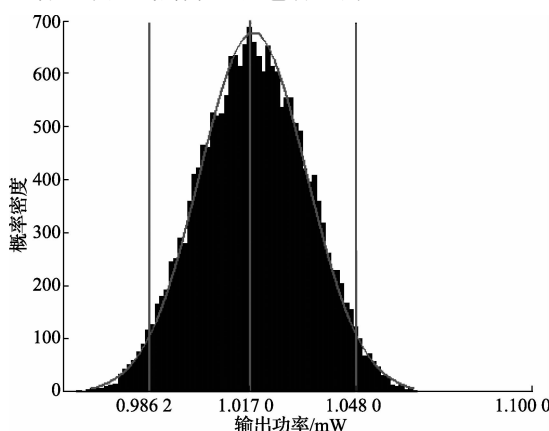


图 4 1 mW 微波功率自适应 MCM 概率分布

从图 3、4 可以看出无论是单批次还是自适应 MCM, 输出量都呈正态分布, 只不过试验次数差异导致概率密度不同。

## 3.2 GUM 法

## 1) 不确定度分量

测量重复性引入不确定度  $u_1 = s(\bar{P}_x) / \sqrt{n} \approx 0.002 \text{ mW}$ , 各不确定度分类如表 1 所示。

2) 合成标准不确定度  $u_c$

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} = 0.015 \text{ mW}$$

3) 扩展不确定度  $U$

$$U = k u_c = 0.030 \text{ mW}, k=2$$

4) 测量结果

$$P = 1.017 \text{ mW}; U = k u_c = 0.031 \text{ mW}, k=2$$

### 3.3 用 MCM 验证 GUM 法的结果

国际计量学指南联合委员会及 JJF1059.2—2012 建议用 MCM 及 GUM 共同评定测量不确定度, 并比较, 如果结果良好, 则 GUM 法适用于此种情况, 以后类似情况可用, 否则, 应考虑 MCM。方法是确定 2 个包含区间各自端点的绝对偏差是否全部小于数值容差<sup>[9]</sup>。据此方法, 单批次 MCM 对 GUM 法验证:

$$|1.017 - 0.031 - 0.986 \text{ mW}| = 0.001 < 0.000 \text{ mW}$$

$$|1.017 + 0.031 - 1.048 \text{ mW}| = 0 < 0.000 \text{ mW}$$

自适应 MCM 对于 GUM 法验证:

$$|1.017 - 0.031 - 0.986 \text{ mW}| = 0.000 \text{ mW} < 0.000 \text{ mW}$$

$$|1.017 + 0.031 - 1.047 \text{ mW}| = 0.000 \text{ mW} < 0.000 \text{ mW}$$

从结果可以看出单批次和自适应 MCM 都通过了 GUM 法的验证, GUM 法适用微波功率测量。

### 3.4 结果分析

单批次 MCM、自适应 MCM 和 GUM 法结果如表 2 所示(MCM1 是单批次 MCM, MCM2 是自适应 MCM)。

表 2 单批次和自适应 MCM 与 GUM 法结果

| 方法    | 估计值     | 标准不确定度  | 95% 包含区间 |         |
|-------|---------|---------|----------|---------|
|       |         |         | 左端点      | 右端点     |
| MCM1  | 1.017 0 | 0.016 1 | 0.986 1  | 1.047 9 |
| MCM2  | 1.017 1 | 0.016 1 | 0.986 2  | 1.048 0 |
| GUM 法 | 1.017 0 | 0.015 3 | 0.986 0  | 1.048 0 |

从表 2 可以看出, 3 种方法结果除标准不确定度外几乎完全一样。单批次和自适应 MCM 结果存在细微差别, 原因在于 MATLAB 随机数生成的随机性。抽样时各批次随机数不同, 导致单批次 MCM 每次结果都有所变化, 直到统计稳定后结果恒定。故自适应 MCM 结果一定在各单批次 MCM 值区间内。GUM 法得到的标准不确定度比 MCM 小 5%, 原因在于各输入量不确定度分类大小不接近, 最大与最小相差近 50 倍, 计算合成标准不确定度时各分量平方和开方后出现截断误差, 导致结果偏小<sup>[10]</sup>, 这是 GUM 法的局限所在。MCM 法验证了线性模型, 在各不确定度分量相差较大情况下优势明显。

## 4 结论

详细介绍了蒙特卡洛法评定测量不确定度过程, 结合 MATLAB 说明蒙特卡洛法实现过程。使用单批次 MCM 和自适应 MCM 对给定频率下 1 mW 微波输出功率测量不确定度进行评定, 并与 GUM 法结果进行比较和验证。结果表明, MCM 结果与 GUM 法几乎相同, 能够完全验证 GUM 法结论, 非常适合微波功率评定。MCM 法同样适合线性模型, 在各不确定度分量相差较大情况下能够真实体现输出量测量不确定度。MCM 方法更为简单, 方便, 可以编写模块程序大范围推广。

### 参考文献

- [1] 王彦春. 蒙特卡洛法测定测量不确定度的理解和应用[J]. 铁道技术监督, 2014, 42(12): 17-20.
- [2] 国家质量监督检验检疫总局. JJF1059.2—2012 用蒙特卡洛法评定测量不确定度[S]. 北京: 中国质检出版社, 2013: 1-20.
- [3] 许淑艳. 蒙特卡罗法在实验核物理中的应用[M]. 北京: 原子能出版, 2006.
- [4] 王伟, 宋明顺, 陈意华, 等. 蒙特卡罗方法在复杂模型测量不确定度评定中应用[J]. 仪器仪表学报, 2008, 29(7): 1446-1449.
- [5] 陈怀艳, 曹芸, 韩洁. 基于蒙特卡罗法的测量不确定度评定[J]. 电子测量与仪器学报, 2011, 25(4): 301-308.
- [6] 凌明祥, 李会敏, 黎启胜, 等. 含相关性的测量不确定度拟蒙特卡罗评定方法[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(6): 1385-1391.
- [7] 周桃庚. 用蒙特卡洛法评定测量不确定度[M]. 北京: 中国质检出版社, 2013: 55-56.
- [8] 何霞, 陈梦甦. 基于 MATLAB 的同轴空气线相关理论值的探讨和推算[J]. 国外电子测量技术, 2013, 32(12): 46-48.
- [9] 刘存成, 胡畅. 基于 MATLAB 用蒙特卡洛法评定测量不确定度[M]. 北京: 中国质检出版社, 2014: 198.
- [10] 广州致远电子股份有限公司. 何为“真正意义”的参数测量, 统计技术[J]. 国外电子测量技术, 2014, 33(1): 24-25.

### 作者简介

王瑞宝, 1973 年出生, 工学博士, 工程师。主要研究方向为仪器与测试技术、电磁兼容。

E-mail: 179782184@qq.com