DOI:10.19652/j.cnki.femt.2305446

基于改进跟踪微分器的电磁悬浮控制系统研究*

于锦涛[1,2] 杨 杰[1,2,3] 胡海林[1,2] 周发助[1,2]
(1.江西理工大学永磁磁浮与轨道交通研究院 赣州 341000;2.江西省磁悬浮技术重点实验室 赣州 341000;
3.中国科学院赣江创新研究院 赣州 341000)

摘 要:在电磁悬浮(EMS)控制系统中,如何实现间隙及间隙微分信号的有效提取是提升系统控制性能的关键问题。针对当前跟踪微分器(TD)存在的综合控制函数形式复杂、参数整定繁琐、输出存在抖振等问题,设计了一种改进的非线性跟踪微分器,旨在提升传感器信号的提取质量。首先通过引入反平方根函数与终端吸引子函数,设计了新型的跟踪微分器。之后应用稳定性理论对改进跟踪微分器的收敛性进行验证,并通过扫频测试进行频域特性分析,明确了该跟踪微分器的参数整定原则。最后进行了闭环控制系统仿真与实物验证,结果表明,ISRU-TD 相对于其他 3 种 TD 方法在稳态误差方面表现出显著优势。输出位置信号的稳态误差减小了 92.58%,相对于 ATD 减小了 18.18%,相对于 Fhan-TD 减小了 42.55%,而与 HSTD 相比则增加了 3.7%。此外,ISRU-TD 使输出位置信号的调节时间显著减小,相对于 ATD 减小了 38.68%,相对于 Fhan-TD 减小了 61.99%,相对于 HSTD 减小了 58.06%。表明其具有出色的信号跟踪和噪声抑制能力。

关键词:悬浮控制;反平方根函数;终端吸引子函数;扫频测试
中图分类号: U125 **文献标识码**:A **国家标准学科分类代码**: 510.80

Research on electromagnetic levitation control system based on improved tracking differentiator

Yu Jintao[1,2] Yang Jie[1,2,3] Hu Hailin[1,2] Zhou Fazhu[1,2]
(1. Institute of Permanent Maglev and Rail Transit, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China; 2. Jiangxi Provincial Key Laboratory of Maglev Technology, Ganzhou 341000, China; 3. Ganjiang Innovation Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In the context of electro-magnetic suspension (EMS) control systems, the effective extraction of gap and gap differential signals stands as a pivotal challenge, directly influencing the system's control performance. To enhance the quality of sensor signal extraction, an enhanced non-linear tracking differentiator (TD) has been ingeniously devised to address the intricacies of control functions, convoluted parameter configurations, and the issue of chattering in the output. Primarily, a novel tracking differentiator has been conceived by introducing the inverse square root function and the terminal attractor function. Subsequently, the stability theory has been employed to validate the convergence of the improved tracking differentiator. Furthermore, the frequency domain characteristics have been scrutinized through a sweep frequency test, elucidating the parameter tuning principles of the tracking differentiator. Conclusively, a series of closed-loop control system simulations and physical verifications have been executed. The results conclusively demonstrate the pronounced advantages of the improved square root unit tracking differentiator (ISRU-TD) in terms of steady-state error reduction. The steady-state error of the output position signal has been reduced by a noteworthy 92.58%, in comparison to ATD, by 18.18% when compared to Fhan-TD, and by 3.7% in comparison to HSTD. Furthermore, ISRU-TD substantially reduces the adjustment time of the output position signal, exhibiting reductions of 38.68% compared to ATD, 61.99% compared to Fhan-TD, and 58.06% compared to HSTD. This underscores its exceptional capability in signal tracking and noise suppression.

Keywords: magnetic control; inverse square root function; terminal attractor function; sweep test

收稿日期:2023-08-18
* **基金项目**:国家自然科学基金(52262050)项目资助

0 引 言

中低速磁浮列车是一种利用电磁力实现无接触支承的新型交通工具。其悬浮系统主要由悬浮控制器、悬浮间隙传感器、悬浮电磁铁以及悬浮电源构成，磁悬浮列车的悬浮控制技术是磁悬浮轨道交通系统的核心技术之一，也是列车安全运行的重要保障[1]。在电磁悬浮(electromagnetic suspension，EMS)系统中，悬浮间隙传感器是至关重要的元件，其能够实时反馈可靠的悬浮间隙信号以实现系统的闭环控制[2]。然而，由于传感器信号易受到外界环境干扰与噪声的影响，因此可能会影响到悬浮系统的控制精度与稳定性。

传感器信号的提取质量是实现精准悬浮控制的基础，如何设计高效的跟踪微分器(tracking differentiator，TD)来提取平滑的传感器信号，是实现系统稳定悬浮的关键环节[3]。针对信号的微分提取及跟踪滤波的问题，国内外学者展开了广泛的研究。韩京清等[4]利用二阶最速开关系统构造出韩式跟踪微分器(function-han tracking differentiator，Fhan)，并给出了离散形式[5]，但在跟踪过程中存在抖振现象，且远离平衡点时收敛速度较慢。徐光智等[6]推导出了真正的离散最速综合函数(function-sun tracking differentiator，Fsun)，对离散跟踪微分器理论进一步完善。王新华等[7]采用线性与非线性组合的连续函数形式代替切换函数，提出了一种快速跟踪微分器(high-speed nonlinear tracking-differentiator，HSTD)，消除了颤振现象，但该算法存在加速度函数形式复杂、参数整定较多，稳定性较弱等问题。刘怡恒等[8]针对韩式快速函数受采样步长限制的问题，在开关曲线附近引入线性区域，采用精确控制，提出了离散的快速跟踪微分器 fast，并应用于磁悬浮列车的测速定位，但存在依赖经验值的问题。Utkin[9]提出了一种高阶的滑模微分器算法，但由于切换函数的存在，导致存在输出抖振的问题。Levant 等[10]基于超螺旋算法(super-twisting algorithm，STA)提出了一种具有鲁棒特性的微分器，但存在对噪声敏感且难以整定参数的问题。文献[11－17]采用了一系列特定的非线性函数代替控制综合函数，包括反正切函数[11]、反双曲正弦函数[12-13]、sigmod 函数[14-15]、双曲正切函数[16-17]等，但均只进行了仿真测试，并未将其应用到实际工程中。

分析已有的跟踪微分器形式可知，当前 TD 仍在抖振[18]、复杂性、参数整定、稳定性和噪声敏感性[19]等方面存在局限性，这些限制为改进跟踪微分器性能提供了必要性与创新性。因此本文提出了一种基于反平方根函数作为控制综合函数的跟踪微分器(inverse square root unit-tracking differentiator，ISRU-TD)，进一步在此基础上引入了终端吸引子函数降低高频信号可能引起的颤振现象。在此基础上应用稳定性证明理论，对所构造的跟踪微分器具体形式进行了理论证明，进一步利用扫频测试进行频域分析并给出参数整定规则，最后将所设计的跟踪微分器与几种典型的跟踪微分器进行仿真与实验对比分析，验证了所设计的跟踪微分器在抗干扰、信号跟踪与滤波效果上的优异性。

1 改进跟踪微分器设计

1.1 反平方根函数原理及特点分析

本文选取了一种神经网络中的激励函数即反平方根函数作为综合控制函数的基本形式。反平方根函数的表达式为：

$$y = Isru(x,a) = \frac{x}{\sqrt{1+ax^2}} \tag{1}$$

当 $a \geqslant 0$ 时，其变化曲线基本如图 1 所示。

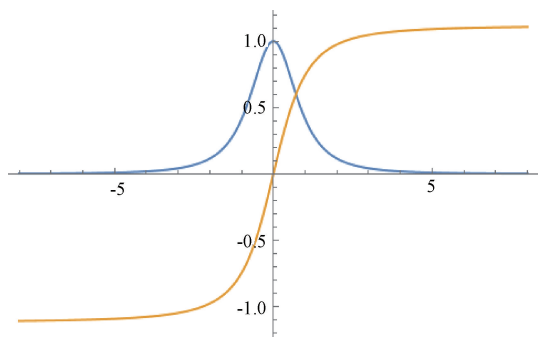


图 1 反平方根函数及其一阶导($a=0.8$)

由图 1 可知，当 $a \geqslant 0$ 时，$Isru(x,a)$ 函数为奇函数，当 $x>0$ 时，$Isru(x,a)>0$；当 $x<0$ 时，$Isru(x,a)<0$。当 x 趋近于 0 时，函数变化率趋近于 1；当 x 趋近于无穷时，函数变化率接近于 0。参数 a 用来调节该函数的近似线性区间宽度。

将上述函数在 $x=0$ 处进行泰勒展开，可得到：

$$\begin{aligned} Isru(x,a) &= Isru(x,a)|_{x=0} + Isru(x,a)'|_{x=0}x + \\ &\quad Isru(x,a)''|_{x=0}x^2 + \cdots + R_n(x) = \\ &\quad x - 3ax^3 + 45a^2x^5 + O(x^5) \end{aligned} \tag{2}$$

式中：$O(x^5)$ 表示 x^5 的高阶项。

由式(2)可知，$Isru(x,a)$ 在 $x=0$ 的邻域内主要呈现平滑稳定的线性性质，当远离零点时，呈现非线性性质，并逐渐趋于平缓接近饱和。函数在定义域内呈光滑连续，因此可以选择用来作为综合控制函数，构建新型的跟踪微分器。

1.2 基于 ISRU 的跟踪微分器构造及证明

定理 1 对于以下系统：

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -l_1 \mid z_1(t) \mid^p Isru(z_1(t),a) - \\ \quad l_2 \mid z_2(t) \mid^p Isru(z_2(t),a) \end{cases} \tag{3}$$

若 $l>0$，$l>0$，$a>0$，$p=n/m$，m、n 为 Terminal 吸引子参数，满足 $m>n>0$，且 m、n 都为奇数。那么式(3)在原点 (0,0) 全局一致渐进收敛，即 $\lim\limits_{t\to\infty} z_1 = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0$。

引理1　考虑一个不受外部作用的系统，描述系统的一般动态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), f(0) = 0 \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{x} = [x_1(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^{\mathrm{T}}$，$f(\cdot)$ 为 n 维连续函数。若 $\exists V(\boldsymbol{x})$ 对状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量均存在一阶偏导数，且 $V(\boldsymbol{x})$ 及其时间导数满足下列条件：

1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$，即 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的；

2) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$，即 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定的。

则平衡点 $x = 0$ 是渐进稳定的[20]。

本文根据文献[20]的理论对新提出的跟踪微分器的收敛性进行证明，主要结论如引理2所示。

引理2　假设 $f: R^2 \to R$ 是局部 Lipschitz 连续函数，且满足 $f(0,0) = 0$。设下列系统的平衡点 $(0,0)$ 是全局渐进收敛：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t)), & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \tag{5}$$

式中：(x_{10}, x_{20}) 为任意给定的初始值。如果对于任意的输入信号 $v(t)$，当其满足条件可微且 $A = \sup_{t\in[0,\infty]} |\dot{v}(t)| < \infty$，则其摄动形式式(6)的解也是渐进收敛的。

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = R^2 f\left(x_1(t) - v(t), \dfrac{x_2(t)}{R}\right) \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \tag{6}$$

根据1.1节中的分析与引理2，选取函数 $f: R^2 \to R$ 为式(7)。

$$f(z_1(t), z_2(t)) = -l_1 \mid z_1(t) \mid^p Isru(z_1(t), a_1) - l_2 \mid z_2(t) \mid^p Isru(z_2(t), a_2) \tag{7}$$

式中：取 $R > 0$，$0 < p < 1$，$l_1 > 0$，$l_2 > 0$，$a_1 > 0$，$a_2 > 0$。

函数 f 是在反平方根函数的基础上引入了非线性函数 $|\cdot|^p$，其类似于滑模控制中的终端吸引子函数 $|\cdot|^{\frac{n}{m}}$，其中 $m > n > 0$ 且都为奇数。终端吸引子函数可以有效避免微分器出现输出高频抖振现象，抑制噪声，有效的增强了微分器的滤波性能。

本文提出的 ISRU-TD 的具体表达式构造如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = R^2 \left[-l_1 \mid x_1(t) - v(t) \mid^p Isru(x_1(t) - v(t), a_1) - l_2 \left| \dfrac{x_2(t)}{R} \right|^p Isru\left(\dfrac{x_2(t)}{R}, a_2\right) \right] \end{cases} \tag{8}$$

式中：$v(t)$ 表示系统的输入信号；$x_1(t)$ 表示系统对输入信号的跟踪信号；$x_2(t)$ 表示跟踪信号的微分形式；R、a_1、l_1、a_2、l_2、p 表示系统需要调节的参数。

证明式(8)ISRU-TD 的稳定性，首先给出引理3。

引理3　对于时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = h(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D \subset \boldsymbol{R}^n \tag{9}$$

若正定函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足下列3个条件：

1)当 $\boldsymbol{x} \to \infty$ 时，$\exists V(\boldsymbol{x}) \to \infty$；

2)沿式(9)的 $V(\boldsymbol{x})$ 对时间的全导数恒为正(或负)；

3)除 $\boldsymbol{x} = 0$ 外，不存在其他轨线上的点使 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$ 成立，则式(9)的解全局渐进稳定。

根据引理2，将分3步证明式(8)满足如下3个条件。

条件1　对于式(5)所示的 $f: R^2 \to R$ 是局部 Lipschitz 连续函数，且 $f(0,0) = 0$。

条件2　对于如下所示系统 $\sum_0$：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -l_1 \mid x_1(t) \mid^p Isru(x_1(t), a_1) - l_2 \mid x_2(t) \mid^p Isru(x_2(t), a_2) \end{cases} \tag{10}$$

在平衡点 $(0,0)$ 全局渐进收敛。

条件3　系统 $\sum_1$ 是系统 $\sum_0$ 的摄动形式。

步骤1)证明 $f: R^2 \to R$ 是局部 Lipschitz 连续函数，且 $f(0,0) = 0$。

结合式(1)和(5)，由初等函数性质可知，$f: R^2 \to R$ 为连续函数且可微。f 的微分形式为：

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{a_1 l_1 z_1^2 \mid z_1 \mid^p}{(1 + a_1 z_1^2)^{3/2}} - \frac{l_1 \mid z_1 \mid^p}{\sqrt{1 + a_1 z_1^2}} - \frac{p l_1 z_1 \mid z_1 \mid^{p-1} \mid z_1 \mid'}{\sqrt{1 + a_1 z_1^2}} + \frac{a_2 l_2 z_2^2 \mid z_2 \mid^p}{(1 + a_2 z_2^2)^{3/2}} - \frac{l_2 \mid z_2 \mid^p}{\sqrt{1 + a_2 z_2^2}} - \frac{p l_2 z_2 \mid z_2 \mid^{p-1} \mid z_2 \mid'}{\sqrt{1 + a_2 z_2^2}} \tag{11}$$

由局部 Lipschitz 的判断准则："只要可微，则局部 Lipschitz"，可知 $f: R^2 \to R$ 为局部 Lipschitz 连续函数。

将 $(z_1, z_2) = (0,0)$ 代入式(5)可得到 $f(0,0) = 0$。因此式(8)满足条件1。

步骤2)证明式(10)在平衡点 $(0,0)$ 处全局渐进收敛。

构造李雅普诺夫函数：

$$V(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2} z_2^2 \tag{12}$$

由于 $0 < p < 1$，所以 $|\xi|^p > 0$。同时 $a_1 > 0$，$l_1 > 0$，且当 $z_1 > 0$ 时，$l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) > 0$；当 $z_1 < 0$ 时，$l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) > 0$。根据积分中值定理可得：

$$\int_0^{z_1} l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) \mathrm{d}x = l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) \mathrm{d}\xi \cdot z_1 \tag{13}$$

结合反平方根函数的性质可知，当 $0 < \xi < z_1$ 时，有 $\int_0^{z_1} l_1 \mid \xi \mid^p Isru(\xi, a_1) \mathrm{d}\xi > 0$ 成立。当 $z_2 \neq 0$ 时，$\frac{1}{2} z_2^2 > 0$，因此 $V(z_1, z_2) > 0$。

对其进行求导，可得：

$$\dot{V}(z_1, z_2) = l_1 \mid z_1 \mid^p Isru(z_1, a_1) \dot{z}_1 + \dot{z}_2 z_2 = l_1 \mid z_1 \mid^p Isru(z_1, a_1) z_2 + (-l_1 \mid z_1 \mid^p Isru(z_1, a_1) - l_2 \mid z_2 \mid^p Isru(z_2, a_2)) z_2 = -l_2 \mid z_2 \mid^p Isru(z_2, a_2) z_2 \tag{14}$$

同理，又由于 $l_2>0$，当 $z_2\geqslant 0$ 时，则 $\dot{V}(z_1,z_2)\leqslant 0$。在零点附近，当且仅当 $z_2=0$ 时，$\dot{V}(z_1,z_2)=0$ 成立。因此，根据李雅普诺夫第二定理，系统式(10)是全局一致渐进稳定的。

步骤 3)证明系统 $\sum_1$ 是系统 $\sum_0$ 的摄动形式。

定义系统 $\sum_1$ 输出对输入信号 $v(t)$ 的误差为：

$$\begin{cases} e_1(t)=x_1(t)-v(t) \\ e_2(t)=x_2(t)-\dot{v}(t) \end{cases} \tag{15}$$

则系统 $\sum_1$ 对信号的误差系统为：

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t)=e_2(t) \\ \dot{e}_2(t)=R^2\left[-l_1\mid e_1(t)\mid^p Isru(e_1(t),a_1)-\right. \\ \quad \left. l_2\left|\dfrac{e_2(t)+\dot{v}(t)}{R}\right|^p Isru\left(\dfrac{e_2(t)+\dot{v}(t)}{R},a_2\right)\right]- \\ \quad \ddot{v}(t) \end{cases} \tag{16}$$

由于待设计参数 $R>0$ 为常量，则有以下关系式成立：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}e_1(t)}{\mathrm{d}(Rt)}=\dfrac{e_2(t)}{R} \\ \dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{e_2(t)}{R}\right)}{\mathrm{d}(kt)}=-l_1\mid e_1(t)\mid^p Isru(e_1(t),a_1)- \\ \quad l_2\left|\dfrac{e_2(t)+\dot{v}(t)}{R}\right|^p Isru\left(\dfrac{e_2(t)+\dot{v}(t)}{R},a_2\right)- \\ \quad \dfrac{\ddot{v}(t)}{R^2} \end{cases} \tag{17}$$

记 $\eta=Rt$，$z_1(\eta)=e_1(t)$，$z_2(\eta)=\dfrac{e_2(t)}{R}$，则：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=z_2(\eta) \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=-l_1\mid z_1(\eta)\mid^p Isru(z_1(\eta),a_1)- \\ \quad l_2\left|z_2(\eta)+\dfrac{\dot{v}(t)}{R}\right|^p Isru\left(z_2(\eta)+\dfrac{\dot{v}(t)}{R},a_2\right)- \\ \quad \dfrac{\ddot{v}(t)}{R^2} \end{cases} \tag{18}$$

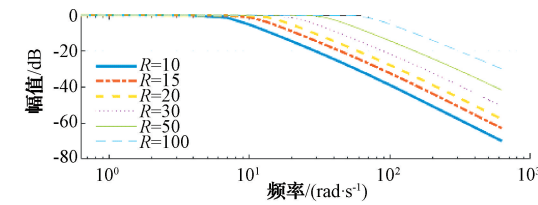
由式(6)的假设可知，$v(t)$ 满足可微条件且 $A=\sup_{t\in[0,\infty]}\mid\dot{v}(t)\mid<\infty$，故 $v(t)$ 的前两阶倒数 $\dot{v}(t)$、$\ddot{v}(t)$ 是有界的。当 $R\to\infty$ 时，有 $\dfrac{\dot{v}(t)}{R}\to 0$，$\dfrac{\ddot{v}(t)}{R}\to 0$。此时系统 $\sum_1\Leftrightarrow\sum_0$，故系统 $\sum_1$ 是系统 $\sum_0$ 的摄动形式。

故综上所述，如式(8)所构造的 ISRU-TD 渐进收敛。

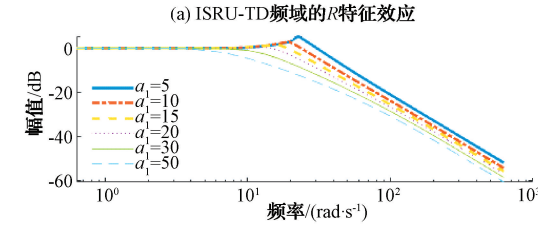
2 ISRU-TD 频域特性分析及参数整定

采用文献[21]的扫频测试方法对设计的跟踪微分器绘制 Bode 图，利用 Bode 图对其进行频域特性分析。通过分析设计参数的变化，从理论上确定参数与 TD 特性的关系，为工程参数整定规则提供依据。

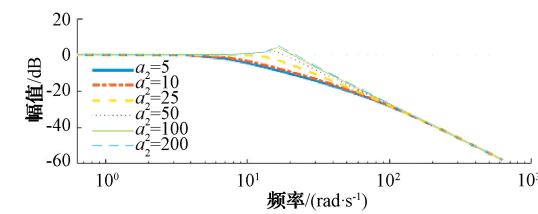
采样周期设为 1 ms，即采样步长 $h=0.001$ s。输入信号设为正弦信号 $u(t)=0.5\sin 2\pi Ft$，频率 F 初始频率取 1 Hz，终止频率取 10 Hz，步长设为 0.5 Hz。对于每个频率点，运行 20 000 个采样时间，并记录采样区间[10 000,15 000]的数据。ISRU-TD 的频域特性如图 2 所示，其设计的参数取值如表 1 所示。



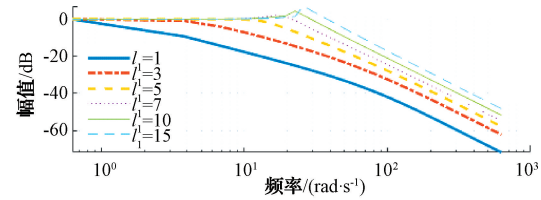
(a) ISRU-TD频域的R特征效应

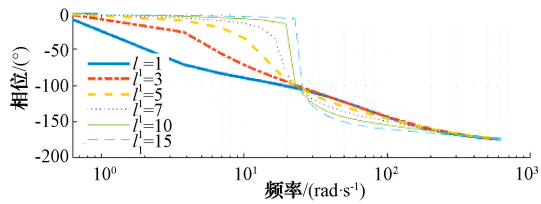


(b) ISRU-TD频域的a_1特征效应

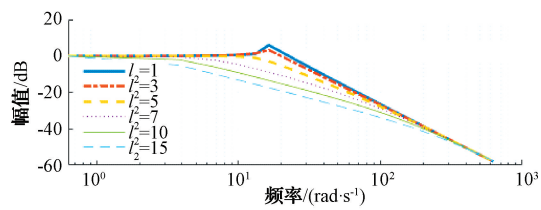


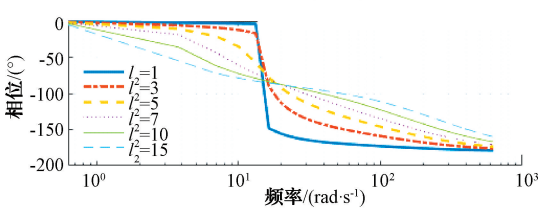
(c) ISRU-TD频域的a_2特征效应



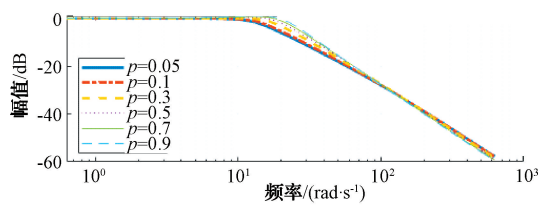


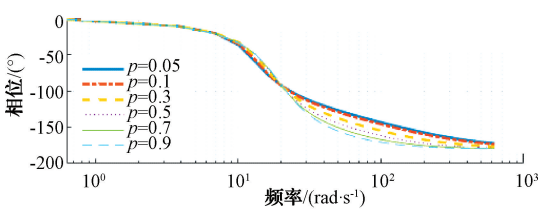
(d) ISRU-TD频域的l_1特征效应





(e) ISRU-TD频域的l_2特征效应





(f) ISRU-TD频域的p特征效应

图 2　设计参数对 ISRU-TD 频域特性的影响

表 1　扫频测试中 ISRU-TD 参数值

测试可变参数	固定参数值
R=10,15,20,30,50,100	a_1=a_2=25,l_1=l_2=5,p=0.1
a_1=5,10,15,20,30,50	R=20,a_2=25,l_1=l_2=5,p=0.1
a_2=5,10,25,50,100,200	R=20,a_1=25,l_1=l_2=5,p=0.1
l_1=1,3,5,7,10,15	R=20,a_1=a_2=25,l_2=5,p=0.1
l_2=1,3,5,7,10,15	R=20,a_1=a_2=25,l_1=5,p=0.1
p=0.05,0.1,0.3,0.5,0.7,0.9	R=20,a_1=a_2=25,l_1=l_2=5

通过分析式(3)与图 2 可得到设计参数的整定规则。分析图 2(a)可知，参数 R 增大，系统的带宽频率增大，对输入信号的跟踪速率越快，能够跟踪的信号频率越高，但对高频噪声的抑制能力也会减弱。在转折频率附近，相频特性曲线由 0° 快速降到 −180°，类似于 2 阶线性低通滤波器。由图 2(b)与(e)可知，a_1 与 l_2 的适当减小，可以提高系统带宽，增强 ISRU-TD 的滤波性能，但过量的减小会导致超调的出现。由图 2(c)与(d)可知，a_2 与 l_1 的适度增大，可以提高系统带宽，增强 ISRU-TD 的滤波性能，但过度的增大会导致超调的出现。由图 2(f)可知，终端吸引子参数 p 越大，ISRU-TD 的滤波性能越强。

参数整定规则可归纳为初始值都给一个较小的值，首先调节 l_1 与 l_2，将输出信号调整到趋近于输入信号附近的状态，其次再增大 R，此时会加快信号跟踪效果，当微分信号的滤波效果变得不理想时，可以考虑减小 R，同时调节 l_1 与 l_2 的值，l_2 的适当增大可以提高跟踪微分器的噪声抑制能力，最后再微调参数 a_1、a_2 以及 p。

为了方便在工程实际中的应用，可令 $a_1=a_2=a$，$l_1=l_2=l$，这样原本的 6 个参数可简化为 4 个参数，有利于参数整定。

3　ISRU-TD 仿真实验与性能分析

为了验证 ISRU-TD 的跟踪与滤波性能，一方面采用正弦信号与方波信号作为输入信号进行仿真测试[22-23]，另一方面在悬浮平台上进行实验。并与反正切跟踪微分器(arctangent tracking differentiator，ATD)、Fhan 跟踪微分器、快速跟踪微分器 HSTD 进行对比，对比的 3 种跟踪微分器的形式如下。

1)反正切跟踪微分器[11]

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=R^2(-a_1\arctan[f_1(x_1(t)-v)]-\\ \quad a_2\arctan[f_2x_2(t)/R])\end{cases}\tag{19}$$

式中：$R>0$，$a_1>0$，$a_2>0$，$f_1>0$，$f_2>0$ 为待设计参数。

2)Fhan 跟踪微分器[4]

$$fsg(x,d)=\frac{sign(x+d)-sign(x-d)}{2}\tag{20}$$

$$\begin{cases}d=rh^2\\ a_0=hx_2\\ y=x_1+a_0\\ a_1=\sqrt{d(d+8|y|)}\\ a_2=a_0+\dfrac{sign(y)(a_1-d)}{2}\\ a=(a_0+y)fsg(y,d)+a_2(1-fsg(y,d))\\ fhan=-r\left(\dfrac{a}{d}\right)fsg(a,d)-\\ \quad rsign(a)(1-fsg(a,d))\end{cases}\tag{21}$$

$$\begin{cases} fh = fhan(x_1(k)-v(k),x_2(k),r,h_0) \\ x_1(k+1) = x_1(k)+hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)+hfh \end{cases} \tag{22}$$

式中：$r>0$，$h>0$，$h_0>0$ 为待设计参数。

3)快速跟踪微分器[7](HSTD)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = R^2(-a_0(x_1(t)-v(t))-a_1(x_1(t)- \\ \quad v(t))^{\frac{m}{n}}-b_0\dfrac{x_2(t)}{R}-b_1(\dfrac{x_2(t)}{R})^{\frac{m}{n}}) \end{cases} \tag{23}$$

式中：$n>m$，m、n 均为大于 0 的奇数，R、a_0、a_1、b_0、b_1、m、n 为待设计参数。

3.1 ISRU-TD 评价指标

TD 种类体现的是对不同控制综合函数的选取，为了反映控制综合函数形式的复杂程度(functional formal complexity，FFC)与参数整定繁琐程度(parameter setting complexity，PSC)，因此需要引入评价指标[24-25]。参数整定的繁琐程度取决于参数数量 n_a、参数整定方法以及参数整定时间 t_a。函数形式的复杂程度与收敛速度、跟踪误差相关，输出信号对于输入信号的收敛速度越快、跟踪误差越小，控制综合函数形式越简单。

常见性能指标中绝对误差积分[26-27](integral of absolute error，IAE)侧重于体现系统传感器噪声等抑制能力，因此本文在 IAE 的基础上构建 FFC 函数，其中 α 是不同 TD 下输出信号完全跟踪上输入信号的时间与原始跟踪时间比值。PCS 函数采用参数整定时间与参数数量的乘积，参数整定方法均采用试错法。

$$IAE = \int_0^t |e_y|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t |y_r - y|\,\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

$$FFC = \frac{IAE}{\alpha} \tag{25}$$

$$PSC = t_a n_a \tag{26}$$

方波信号下 TD 误差积分如表 2 所示，可以看出，与其他 3 种 TD 相比，ISRU-TD 不仅具有更为简洁的控制综合函数形式，还拥有更迅速的参数整定过程。

表 2 方波信号下 TD 误差积分

参考信号	TD 类型	FFC	PSC
方波信号	ATD	1.495×10^{-1}	20
	Fhan-TD	3.843×10^{-2}	35
	HSTD	4.175×10^{-3}	17
	ISRU-TD	2.014×10^{-3}	15

3.2 ISRU-TD 性能仿真对比

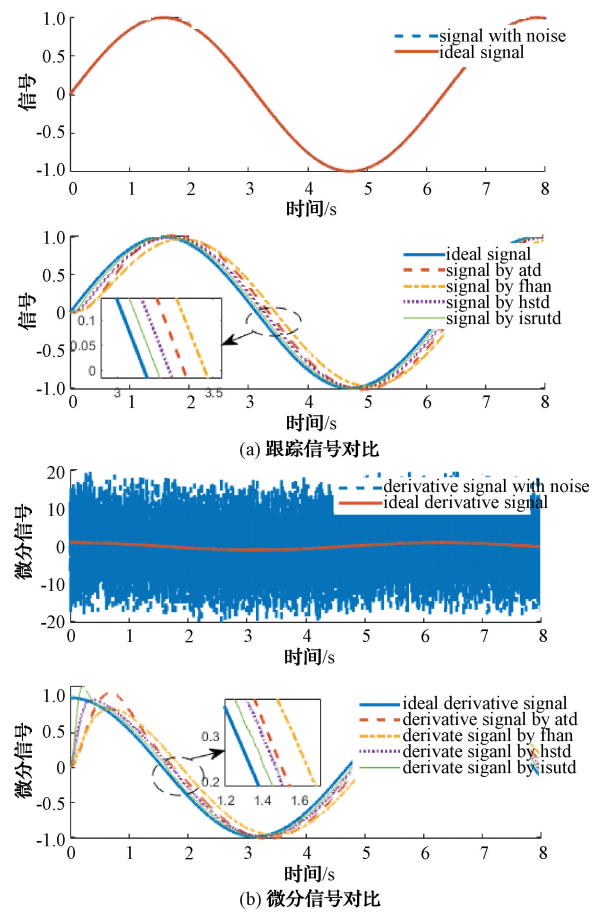
在 MATLAB R2022b 中编写 M 脚本函数，搭建 4 种 TD 的离散模型，分别采用正弦信号与方波信号作为输入信号，进行仿真测试，对比输出跟踪与微分信号曲线，验证 ISRU-TD 的优越性。

1)正弦信号响应

假设输入信号 $u(t)=\sin(t)+\gamma n$，n 为高斯白噪声，$\gamma=0.01$。仿真步长 $h=0.001$ s，将上述算法都进行离散化，4 种跟踪微分器的参数取值如表 3 所示，其输出跟踪与微分曲线如图 3 所示。

表 3 正弦信号下 TD 参数值

TD 类型	参数值
ATD	$R=5$，$a_1=a_2=0.5$，$f_1=f_2=2$
Fhan-TD	$\delta=85$，$h_0=0.16$
HSTD	$R=8$，$a_0=a_1=1$，$b_0=1$，$b_1=1.14$，$p=0.9$
ISRU-TD	$R=15$，$l_1=l_2=2$，$a_1=a_2=0.5$，$p=0.29$



(a) 跟踪信号对比

(b) 微分信号对比

图 3 正弦信号响应下的跟踪及微分信号

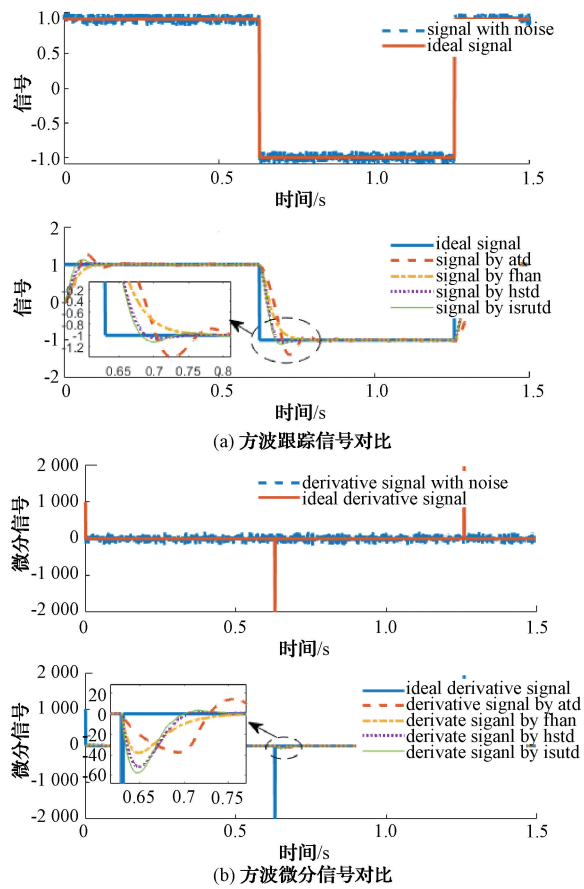
由图 3 可以看出，4 种跟踪微分器均能实现对正弦信号无超调且稳定跟踪，输出曲线都较为平滑，无颤振现象，均具有较好的噪声抑制能力。仿真结果表明，与其他 3 种 TD 相比，ISRU-TD 具有更高的跟踪精度与微分精度。

2)方波信号响应

假设输入信号 $u(t)=square(0.5t)+\gamma n$，$n$ 为高斯白噪声，$\gamma=0.1$，仿真步长 $h=0.001$ s。4 种跟踪微分器的参数取值如表 4 所示，其跟踪及微分输出曲线对比如图 4 所示。

表 4　方波信号下 TD 参数值

TD 类型	参数值
ATD	$R=100, a_1=a_2=0.1, f_1=f_2=5$
Fhan-TD	$\delta=7\ 000, h_0=0.02$
HSTD	$R=40, a_0=a_1=1, b_0=1, b_1=1.14, p=0.9$
IARU-TD	$R=60, l_1=l_2=2, a_1=a_2=1.5, p=0.29$



(a) 方波跟踪信号对比

(b) 方波微分信号对比

图 4　方波信号响应下的跟踪信号及微分信号

由图 4 可知，ISRU-TD 对方波信号的跟踪速度最快，上升时间最短，具有较强的噪声抑制能力，ATD 的超调最为严重，响应时间最长。仿真结果表明，ISRU-TD 可以实现对方波信号的快速跟踪，且具备一定的噪声抑制能力。

3.3　ISRU-TD 实验对比分析

为了测试本文提出的新型跟踪微分器的性能，在单点悬浮 F 轨平台上进行实验，实验装置整体结构如图 5 所示。

主控制板采用 TI 公司的 TMS320F28335DSP 进行数字化控制[28-29]，该浮点 DSP 支持浮点数运算以及函数运算，且具有运算速度快、功耗低等优点。悬浮控制算法上采用位置外环 PID 电流内环 PI 串级闭环控制[30]，采用激光传感器获取悬浮高度信号。

实验平台的间隙为 0～7 mm，激光传感器的采样频率

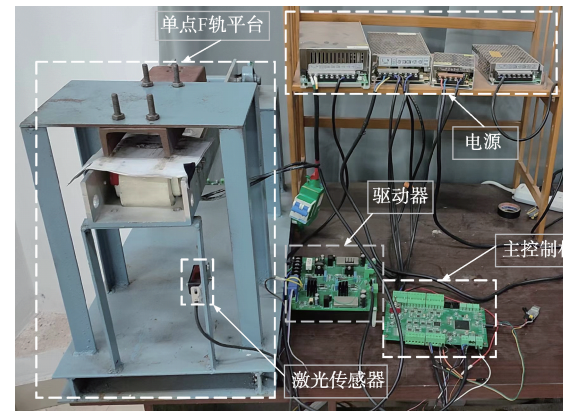


图 5　单点 F 轨平台实验装置

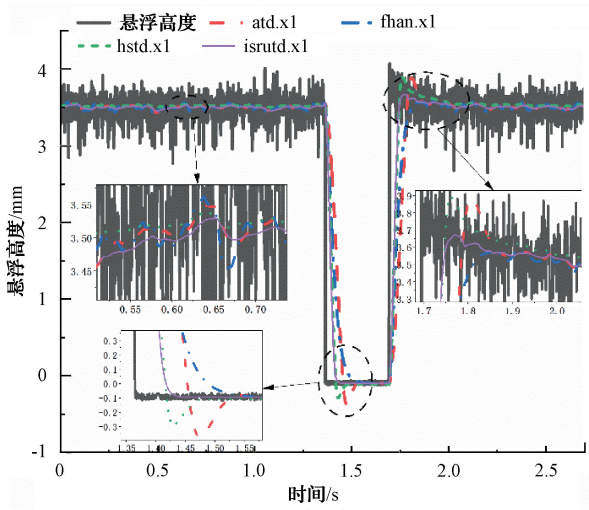
为 1 kHz，悬浮高度初始设为 3.5 mm，在 1.365 s 时设定悬浮高度为 0 mm，1.7 s 时设定悬浮高度为 3.5 mm。具体参数设置如表 5 所示，悬浮高度信号与 4 种跟踪微分器输出的效果对比如图 6 所示。

表 5　跟踪微分器参数设置

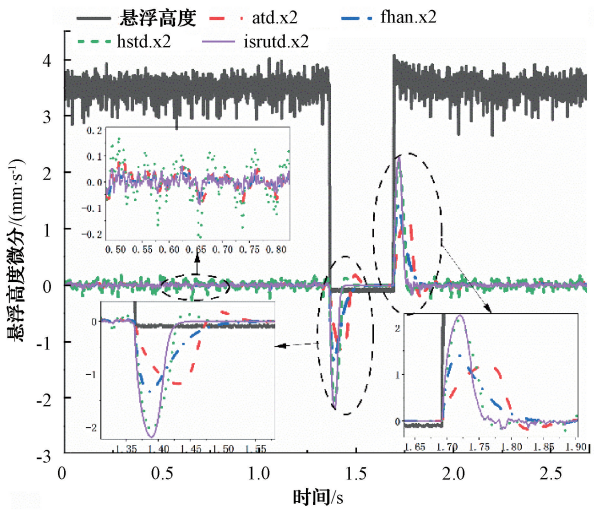
类型	参数
ATD	$R=1, a_1=1, a_2=2, f_1=f_2=2$
Fhan-TD	$\delta=1, h_0=0.5$
HSTD	$R=1, a_0=1, a_1=3, b_0=2, b_1=1, p=0.2$
ISRU-TD	$R=1.2, l_1=l_2=5, a_1=a_2=1, p=0.2$

由图 6 可知，当系统处于稳定悬浮时，实际位置稳定的稳态误差为±0.728 mm；ATD 作用下输出的位置跟踪信号稳态误差为±0.066 mm，位置微分信号稳态误差为±0.103 mm；Fhan-TD 作用下输出的位置跟踪信号稳态误差为±0.094 mm，位置微分信号稳态误差为±0.091 mm；HSTD 作用下输出的位置跟踪信号稳态误差为±0.052 mm，位置微分信号稳态误差为±0.307 mm；ISRU-TD 作用下输出的位置跟踪信号稳态误差为±0.054 mm，位置微分信号稳态误差为±0.103 mm。输出位置跟踪信号的稳态误差相比于原始采集信号减小了 92.58%，相比于 ATD 减小了 18.18%，相比于 Fhan-TD 减小了 42.55%，相比于 HSTD 增加了 3.7%。输出位置微分信号的稳态误差与 ATD 相当，相比于 Fhan-TD 增加了 11.65%，相比于 HSTD 减小了 66.45%。

当设定悬浮高度由 3.5 mm 突变为 0 mm 时，系统存在 0.1 mm 的静差，抖动幅度为 0.05 mm。ATD 作用下，输出位置信号调节时间为 0.106 s，超调量为 0.188 mm，输出位置微分信号调节时间为 0.11 s，超调量为 2.041 mm；Fhan-TD 作用下，输出位置信号调节时间为 0.171 s，不存在超调，输出位置微分信号调节时间为 0.161 s，超调量为 1.329 mm；HSTD 作用下，输出位置信号调节时间为 0.155 s，超调量为 0.273 mm，输出位置微分信号调节时



(a) 悬浮高度信号



(b) 悬浮高度微分信号

图 6 悬浮高度信号以及微分提取效果对比

间为 0.172 s,超调量为 1.183 mm;ISRU-TD 作用下,输出位置信号调节时间为 0.065 s,不存在超调,输出位置微分信号调节时间为 0.073 s,超调量为 2.187 mm。输出位置信号调节时间相比于 ATD 减小了 38.68%,相比于 Fhan-TD 减小了 61.99%,相比于 HSTD 减小了 58.06%。输出位置微分信号调节时间相比于 ATD 减小了 33.64%,相比于 Fhan-TD 减小了 54.66%,相比于 HSTD 减小了 57.56%。

实验结果与 4 种 TD 的仿真结果基本一致,表明了 ISRU-TD 具有更好的信号跟踪能力与噪声抑制能力。

4 结 论

磁悬浮系统具有典型的非线性、大时滞、强耦合特征,一直是控制领域的难点问题。本文针对如何有效提取间隙信号及微分信号问题,基于反平方根函数设计了一种新型 TD,并将 TD 运用到对电磁悬浮系统中间隙信号及微分信号的获取,在设计新型跟踪微分器时,利用反平方根函数在平衡点附近的近似线性特性与在远离平衡点处的饱和非线性特性保证了新型 TD 的快速性与信号平滑;并引入了终端吸引子函数,提高了微分信号的抗干扰性能。证明了新型 TD 的渐进收敛性,通过频域分析法总结了参数的整定原则,仿真与实验结果均表明,改进的跟踪微分器具有较好的滤波与跟踪性能,具有重要的学术意义和实用价值,对于其他非线性、时滞性、强耦合对象的控制也具有很好的参考价值。

参 考 文 献

[1] 罗茹丹,吴峻,李中秀. 中低速磁浮列车悬浮间隙传感器所处环境空间电磁干扰的研究[J]. 仪表技术与传感器,2018(11):1-6.

[2] 晁闯,吴峻,洪小波, 等. 高速磁浮车辆悬浮间隙传感器与相对定位传感器对比分析[J]. 城市轨道交通研究,2021,24(10):145-148.

[3] 张和洪,谢晏清,王娟, 等. 新型跟踪微分器在航空发动机磁悬浮轴承中的应用[J]. 航空发动机,2022,48(4):13-19.

[4] 韩京清,王伟. 非线性跟踪—微分器[J]. 系统科学与数学,1994, 14(2): 177-183.

[5] 张文跃,佟来生,王滢,等. 跟踪微分器在磁浮列车悬浮间隙处理中的应用[J]. 城市轨道交通研究,2021,24(3):26-29.

[6] 徐光智,孙秀霞,杨朋松, 等. 无抖振离散滑模输出反馈控制方法及仿真研究[J]. 计算机测量与控制,2012,20(3):675-677.

[7] 王新华,陈增强,袁著祉. 全程快速非线性跟踪－微分器[J]. 控制理论与应用,2003(6): 875-878.

[8] 刘怡恒,张和洪,龙志强,等. 基于改进跟踪微分器的磁浮列车悬浮控制研究[J]. 机车电传动,2023(2):113-122.

[9] UTKIN V. Discussion aspects of high-order sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2016, 61(3):829-833.

[10] LEVANT A, LIVNE M. Robust exact filtering differentiators[J]. European Journal of Control,2019,55(9):33-44.

[11] 任彦,赵冠华,刘慧. 快速反正切跟踪微分器设计[J]. 控制工程,2019,26(3):412-416.

[12] 周涛. 基于反双曲正弦函数的跟踪微分器[J]. 控制与决策,2014,29(6):1139-1142.

[13] 王艳,刘斌. 基于双曲函数的非线性跟踪微分器[J]. 系统科学与数学,2017,37(2):321-327.

[14] 邵星灵,王宏伦. 基于改进 sigmoid 函数的非线性跟踪微分器[J]. 控制理论与应用,2014,31(8):1116-1122.

[15] 谭诗利,雷虎民,王鹏飞. 基于正切 Sigmoid 函数的跟踪微分器[J]. 系统工程与电子技术,2019,41(7):

1590-1596.
[16] 毛海杰,李炜,冯小林.基于双曲正切的非线性跟踪微分器设计[J].计算机应用,2016,36(S1):305-309.
[17] 刘延泉,郭佳颖.双曲正切跟踪微分器设计及相平面分析[J].电力科学与工程,2017,33(10):74-78.
[18] 卜祥伟,吴晓燕,马震,等.改进的反正切跟踪微分器设计[J].上海交通大学学报,2015,49(2):164-168.
[19] 龙英文,孙玉鸿,王敬华.基于非线性微分跟踪器的无差拍控制在 APF 中的应用[J].电气自动化,2017,39(1):10-12,81.
[20] GUO B Z,PENG H L,WU Z H. On convergence of nonlinear tracking differentiator based on finite-time stable system subject to stochastic noise[J]. IFAC Journal of Systems and Control,2023, 23:100215.
[21] 李霞,齐国元,郭曦彤,等.高阶微分反馈控制及在四旋翼飞行器中的应用[J].航空学报,2022,43(12):434-444.
[22] 张荣芸,邱天,时培成,等.基于反步鲁棒控制与改进跟踪微分器的 PMSM 无传感器控制[J].电力系统保护与控制,2023,51(15):87-96.
[23] 戈一航,杨光永,徐天奇,等.基于 SSA 优化 PID 在移动机器人路径跟踪中的研究[J].国外电子测量技术,2021,40(9):64-69.
[24] 牛宝良.跟踪微分器频率特性分析[J].装备环境工程,2022,19(5):133-139.
[25] 杨双义,王莹,耿志伟.采用改进滑模控制的开关磁阻电机转速仿真研究[J].国外电子测量技术,2022,41(2):90-94.
[26] 张振利,汪永壮,秦耀,等.基于 Levant 微分器的磁浮球控制算法研究[J].系统仿真学报,2022,38(1):57-61.
[27] 杨杰,秦耀,汪永壮,等.永磁电磁混合型磁浮球的改进滑模控制方法[J].湖南大学学报(自然科学版),2023,50(4):200-209.
[28] 赵海成,李辉.SA-PSO 优化边界最速跟踪微分器在光伏功率平滑中的应用[J].电子测量技术,2022,45(14):36-42.
[29] 龙志强,薛松,贺光,等.基于信号比较的磁浮列车悬浮系统加速度计故障诊断[J].仪器仪表学报,2011,32(12):2641-2647.
[30] 董昱,魏万鹏.基于 RBF 神经网络 PID 控制的列车 ATO 系统优化[J].电子测量与仪器学报,2021,35(1):103-109.

作者简介

于锦涛,硕士研究生,主要研究方向为磁悬浮控制。
E-mail:yujintao4637@163.com

胡海林(通信作者),博士,讲师,主要研究方向为磁悬浮控制、直线电机及其优化控制设计。
E-mail:huhailin@jxust.edu.cn