

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2313197

基于双曲复合函数近似 l_0 范数的 DOA 估计*单泽彪^{1,2,3} 薛泓焱¹ 刘小松¹ 郭靖豪¹ 陈广秋¹(1. 长春理工大学电子信息工程学院 长春 130022; 2. 吉林大学通信工程学院 长春 130022;
3. 长春气象仪器研究所 长春 130102)

摘要: 针对现有压缩感知类波达方向(DOA)估计算法估计精度低、收敛速度慢的问题,提出了基于双曲复合函数近似 l_0 范数的 DOA 估计算法。首先给出了一种双曲复合函数来近似 l_0 范数,将求解 l_0 范数最小问题转化为双曲复合函数的最优化问题,然后为提高算法的全局收敛效率,采用修正牛顿法对双曲复合函数进行最优化求解,通过算法的内外两层循环获取近似 l_0 范数解,外层循环为内层循环提供逼近因子,内层循环根据递减的逼近因子对修正后的牛顿迭代表达式求解,进而得到近似 l_0 范数的最优解,最终得到 DOA 估计值。通过模拟仿真实验对所提算法进行了有效性验证,结果表明所提算法在信噪比为 5 dB 条件下,DOA 估计均方根误差为 0.6856° ,估计成功率高于 98%。

关键词: DOA 估计;压缩感知;双曲复合函数;近似 l_0 范数

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.99

DOA estimation based on approximate l_0 norm of hyperbolic composite functionShan Zebiao^{1,2,3} Xue Hongyao¹ Liu Xiaosong¹ Guo Jinghao¹ Chen Guangqiu¹(1. School of Electronic and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;
2. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China; 3. Changchun Meteorological Instrument Research Institute, Changchun 130102, China)

Abstract: Aiming at the problems of low estimation accuracy and slow convergence of existing array signal direction of arrival (DOA) estimation algorithms, a DOA estimation algorithm based on hyperbolic composite function approximating the l_0 norm is proposed. Firstly, a hyperbolic composite function is given to approximate the l_0 parametric number, and the problem of solving the l_0 parametric minimum is transformed into the optimization problem of solving the hyperbolic composite function. Then, to improve the global convergence efficiency of the algorithm, the modified Newton method is used to optimally solve the hyperbolic composite function. The approximate l_0 norm solution is obtained through the inner and outer loops of the algorithm. The outer loop provides the approximation factor for the inner loop, and the inner loop solves the modified Newton iterative expression according to the decreasing approximation factor. Finally, the optimal solution of the hyperbolic compound function is obtained, from which the DOA estimate is obtained. The effectiveness of the proposed algorithm is verified by simulation experiments, The results show that the root mean square error of DOA estimation is 0.6856° for the proposed algorithm with a signal-to-noise ratio of 5 dB, and the estimation success rate is higher than 98%.

Keywords: DOA estimation; compressed sensing; hyperbolic composite function; approximate l_0 norm

0 引言

波达方向(direction of arrival, DOA)估计^[1-3]是阵列信号处理领域中一个重要的研究内容,其相关算法可以分为传统法^[4]、子空间法^[5-6]、最大似然法^[7]。算法的估计精

度和收敛速度一直是 DOA 估计研究的重点。压缩感知(compressed sensing, CS)技术^[8-10]是近几年提出的一种新的数学工具,阵列信号在空域上满足压缩感知对于信号稀疏性的要求,故稀疏重构算法也被广泛应用于 DOA 估计。

稀疏重构算法需要解决 l_0 范数最小问题,该问题的直

收稿日期:2023-03-26

* 基金项目:吉林省自然科学基金(YDZJ202301ZYTS412)项目资助

接求解是 NP(nondeterministic polynomial) 难的^[11], 为此, 有学者提出用平滑函数替代 l_0 范数, 将求解 l_0 范数最小问题转化为求解平滑函数的极值问题, 采取凸优化方法求解平滑函数的极值, 进而得到稀疏重构模型的稀疏解。文献[12]提出了用修正牛顿方向代替传统的最速梯度方向, 有效避免了梯度下降法锯齿效应的影响, 进而提高了算法的估计精度和收敛速度。文献[13]采用分式函数近似 l_0 范数, 该函数陡峭性较差, 算法估计精度提升有限。文献[14]提出基于自然对数复合函数(natural logarithm smoothed l_0 norm, NLSL0)算法, 估计精度较高, 但该文献利用最速下降法进行迭代计算, 容易陷入局部最优。文献[15]在 SL0 算法基础上提出改进高斯函数(improved smoothed l_0 norm, ISL0)算法, 一定程度上提高了算法估计精度, 在文献[16]中对改进后的高斯函数族进行加权, 提出了加权算法(weighted smoothed l_0 norm, WSL0), 改善效果有限, 且算法收敛较慢。文献[17]提出用复合指数函数近似 l_0 范数, 该平滑函数的陡峭性突出, 但算法中求解复合指数函数的极值, 需结合外点罚函数法与共轭梯度法, 算法复杂度较高。

本文提出一种双曲复合函数来近似 l_0 范数, 该函数对比上述平滑函数, 函数的陡峭性较好, 对 l_0 范数的逼近效果更佳, 且所提算法采用修正牛顿法求解平滑函数的最优化问题, 复杂度较低, 同时提高了算法全局收敛效率和估计精度。通过仿真实验验证了单快拍, 低信噪比条件下所提算法较高的估计精度和估计成功率以及较快的收敛速度。

1 压缩感知的阵列信号接收模型

假设一个阵元数为 M , 阵元之间的间距为 d 的均匀线阵, 均匀线阵所包含的观测空间中有 B 个波达方向分别为 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_B)$ 的远场窄带目标信号源 $s_b(t)$ 。目标信号源 $s_b(t)$ 入射到接收范围为 $(-0.5\pi, 0.5\pi)$ 的均匀线阵中。均匀线阵的接收范围 $(-0.5\pi, 0.5\pi)$ 按等角度分割为 $2N+1$ 份, 即 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2N+1}\}$ 其中每一份角度大小为 $\theta_i = -0.5\pi + 0.5\pi(k-1)/N, k=1, 2, \dots, 2N+1$ 。 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2N+1}\}$ 包含了接收空间中所有可能的波达方向。在线阵的接收空间中, 远场窄带目标信号源 $s_b(t)$ 所在的波达方向上才具有能量分布, 又因目标信号源的个数 $B(B \ll 2N+1)$, 故认为接收信号相对于线阵的整个接收空间 $(-0.5\pi, 0.5\pi)$ 是稀疏的, 满足压缩感知理论对于信号的稀疏性要求。观测时均匀线阵的接收模型为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{G} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$ 为 $M \times 1$ 维接收信号; 导向矢量矩阵即阵列流型矩阵为 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2N+1}]$, \mathbf{A} 是一个 $M \times (2N+1)$ 维的矩阵, 其中列向量 $\mathbf{a}_i = (1, e^{j\sin\theta_i}, \dots, e^{-j(M-1)\pi\sin\theta_i})^T$ 。集合 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2N+1}\}$ 中每一个划分角度与 \mathbf{A} 中向量位置索引一一对应。稀疏入射信号向量 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{2N+1}]^T$ 为 $(2N+1) \times 1$ 维的, 稀疏度为 B , 即向量 \mathbf{s}

有 B 个非零元素。 B 个目标信号源 $s_b(t)$ 的 DOA 信息即入射信号 \mathbf{s} 中的非零元素位置索引映射到划分的角度空间中所对应角度。 \mathbf{G} 为附加高斯白噪声。

2 一种近似 l_0 范数的双曲复合函数

稀疏重构算法的核心问题在于精确的还原出式(1)中的向量 \mathbf{s} , 其基本数学模型(称之为模型 I)为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{s}} & \|\mathbf{s}\|_0 \\ \text{s.t.} & \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\|\cdot\|_0$ 表示向量 \mathbf{s} 的 l_0 范数即 $\|\mathbf{s}\|_0 = \sum_{i=1}^{2N+1} \|s_i\|_0$, $\|s_i\|_0 = \begin{cases} 1, & s_i \neq 0 \\ 0, & s_i = 0 \end{cases}$ 。

利用平滑函数的最优化问题去等价求解 l_0 范数最小问题, 该方法的重点在于构造的平滑函数是否可在递减序列 $\{\sigma_i\}$ 的控制下, 快速准确地完成对 l_0 范数的逼近。对于一个平滑函数 $f_\sigma(s_i)$, 在 $\sigma \rightarrow 0$ 时为:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(s_i) = \begin{cases} 1, & s_i \neq 0 \\ 0, & s_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

对于任意的 $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{2N+1}$, 令 $F_\sigma(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{2N+1} f_\sigma(s_i)$, 可以得到 $\|\mathbf{s}\|_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\mathbf{s})$, 进而式(2)所示模型 I 可转化为优化模型 II, 即:

$$\min_{\mathbf{s}} F_\sigma(\mathbf{s}) \text{ s.t. } \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{X} \quad (4)$$

为求解优化模型 II, 实现对信号的稀疏重构, 文献[12-14]提出了 3 种平滑函数分别为:

$$p_\sigma(s_i) = \frac{e^{\frac{s_i^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{s_i^2}{2\sigma^2}}}{e^{\frac{s_i^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{s_i^2}{2\sigma^2}}} \quad (5)$$

$$q_\sigma(s_i) = \frac{|s_i|}{|s_i| + \sigma} \quad (6)$$

$$k_\sigma(s_i) = 1 - e^{-\frac{\ln(s_i^2 + 1)}{2\sigma}} \quad (7)$$

不同平滑函数所对应的优化模型对 l_0 范数的逼近程度也不相同, 构造一个逼近性能更好的平滑函数是该类算法研究的重点, 所提算法构造的双曲复合函数为:

$$f_\sigma(s_i) = \frac{2}{e^{\frac{|s_i|^q}{\sigma}} + 1} - 1, (0 < q < 1) \quad (8)$$

下面通过图像分布和理论推导验证在 σ 值确定的条件下, 4 种平滑函数 $p_\sigma(s_i)$ 、 $q_\sigma(s_i)$ 、 $k_\sigma(s_i)$ 、 $f_\sigma(s_i)$ 对 l_0 范数的逼近性能。

1) 图像分布

图 1 展示了当参数 $\sigma=0.1$ 时, 对于向量 \mathbf{s} , 4 种平滑函数 $p_\sigma(s_i)$ 、 $q_\sigma(s_i)$ 、 $k_\sigma(s_i)$ 、 $f_\sigma(s_i)$ 几何图像分布情况。从图中可看出当 $\mathbf{s} \rightarrow 0$ 时, 所提算法的平滑函数的曲线更平坦,

其图像分布情况也比另外 3 种函数更加陡峭,对 l_0 范数的逼近效果更佳。

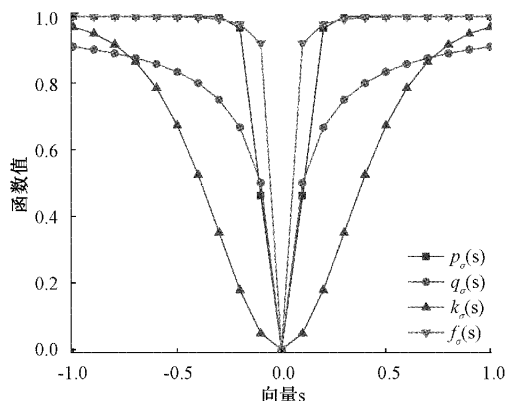


图 1 4 种平滑函数在 $\sigma=0.1$ 时的分布情况

2) 理论分析

图 1 中图像分布展示了双曲复合函数 $f_\sigma(s_i)$ 相对于其他函数对 l_0 范数的更好的逼近性能。接下来将从理论层面验证,对 $\sigma \in (0, 0.9)$ 内任意参数 σ ,所提平滑函数 $f_\sigma(s_i)$ 比另外三种函数中陡峭性最好的 $p_\sigma(s_i)$ 具有更好的逼近效果。因函数具有对称性,所以仅在第一象限内进行讨论。

分析 1:在固定函数值的条件下,讨论对应变量的大小。

假设 $p_\sigma(s_i) = f_\sigma(s_i) = t$,其中 $0 < t < 1, 0 < \sigma < 0.9$,通过式(5)和式(8)可推得对应变量为:

$$t_q = \sigma \sqrt{\ln \frac{1+t}{1-t}} \quad (9)$$

$$t_f = \left(\sigma^2 \ln \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{q}}, 0 < q < 1 \quad (10)$$

由式(9)和(10)可得:

$$t_{pf} = t_p - t_f = \sqrt{\sigma^2 \ln \frac{1+t}{1-t}} - \left(\sigma^2 \ln \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (11)$$

由于所提算法设置 $0 < q < 1$ 则 $t_{pf} < 0$,即对任意的函数值 t 有 $t_{pf} < 0$,对应 $t_f > t_p$ 说明相较于 $f_\sigma(s_i)$ 函数 $p_\sigma(s_i)$ 更接近坐标轴。

分析 2:在固定变量 x 的条件下,讨论对应函数值的大小。

对固定变量 x ,令 $w(x) = p_\sigma(x) - f_\sigma(x)$,讨论 $w(x)$ 与 0 之间的关系,确定两种函数在固定变量条件下取得函数值的大小,进而比较其对 l_0 范数的逼近程度的优劣。根据式(5)和式(8)可得 $w(x)$ 如式(12)所示。

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}} - \frac{2}{e^{\frac{|x|^q}{\sigma^2}} + 1} + 1 \\ &= \frac{2e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}} - \frac{2}{e^{\frac{|x|^q}{\sigma^2}} + 1} \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $x \geq 0, 0 < \sigma < 0.9$,可得 $w(x) < 0$,在固定变量 x 的条

件下, $f_\sigma(x)$ 函数值大于 $p_\sigma(x)$,即 $f_\sigma(x)$ 的函数曲线更为陡峭,对 l_0 范数的逼近性能更好。同理,对函数 $q_\sigma(s_i), k_\sigma(s_i)$ 也可作类似讨论。

3 基于双曲复合函数的稀疏模型

基于式(8)函数构造的优化模型 III 为:

$$\operatorname{argmin}_s F_\sigma(s) \text{ s.t. } \mathbf{A}s = \mathbf{X} \quad (13)$$

式中: $F_\sigma(s) = \sum_{i=1}^{2N \times 1} f_\sigma(s_i)$ 。

优化模型 III 与模型 I 之间的关系表述如下。

定理 1:对任意感知矩阵 \mathbf{A} 和测量向量 \mathbf{X} ,存在一个依赖于 \mathbf{A} 和 \mathbf{X} 的常数 $\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$,当 $0 < \sigma < \sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$ 时,优化模型 III 和模型 I 是等价的。

证明:优化模型 III 等价于模型 I,即两个模型的最优解是相同的。式(13)可转化为:

$$\min_s F_\sigma(s) \text{ s.t. } \mathbf{A}s = \mathbf{X} \Leftrightarrow \min_{s \in \Omega} F_\sigma(s) \quad (14)$$

对任意 σ ,优化模型 III 的最优解 $\hat{s} \in \Omega$,而 Ω 是一个有限集合。

利用反证法证明,存在一个常数 $\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$,当 $0 < \sigma < \sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$ 时,存在唯一一个点 $\hat{s} \in \Omega$ 均为优化模型 III 最小化的解。

假设 1:对一个参数序列 $\{\sigma_i^{(1)}\} \rightarrow 0$,序列中的每一个参数 σ ,在集合 Ω 中均存在一个点为优化模型 III 对应的解。由于集合 Ω 是一个有限集,故必然有一个点可解决对应的优化模型 III。若设该点对应参数序列 $\{\sigma_i^{(1)}\}$ 的解为 s_1^* 。

假设 2:对于另一个参数序列 $\{\sigma_i^{(2)}\} \rightarrow 0$ 和不同于 s_1^* 在集合 Ω 中的点 s_2^* ,令当 $\sigma \in \{\sigma_i^{(2)}\}$ 时,该点为优化模型 III 的解。

结合参数序列 $\{\sigma_i^{(1)}\}$ 和 $\{\sigma_i^{(2)}\}$,构造一个新的参数序列 $\{\sigma_i^{(3)}\}$

$$\sigma_i^{(3)} = \begin{cases} \sigma_i^{(1)}, & i \text{ 为奇数} \\ \sigma_i^{(2)}, & i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (15)$$

对于新序列 $\{\sigma_i^{(3)}\} \rightarrow 0$,在集合 Ω 中必然存在一点为对应优化模型 III 的解,但是 $\{\sigma_i^{(3)}\}$ 是由 $\{\sigma_i^{(1)}\}$ 和 $\{\sigma_i^{(2)}\}$ 构造而成的,所以这个解对应的点必然是 s_1^* 和 s_2^* 中的一个。点 s_1^* 是序列 $\{\sigma_i^{(1)}\}$ 对应优化模型 III 的解,点 s_2^* 是序列 $\{\sigma_i^{(2)}\}$ 对应优化模型 III 的解,无论序列 $\{\sigma_i^{(3)}\}$ 对应的解为两个中的哪一个点,都与两种假设中另一个矛盾。因此存在一个常数 $\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$,当 $0 < \sigma < \sigma(\mathbf{A}, \mathbf{X})$ 时,有唯一一个点 $\hat{s} \in \Omega$ 使得模型 III 满足 $F_\sigma(\hat{s}) = \min_{\mathbf{A}s = \mathbf{X}} F_\sigma(s) \leq \|s\|_0$,其中 s 为可行域中的任意一点。

当 $\sigma \rightarrow 0$ 时,有 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\hat{s}) = \|\hat{s}\|_0 \leq \|s\|_0$,则 \hat{s} 为优化模型 I 的最优解,即 \hat{s} 为优化模型 III 以及模型 I 的最优解,故定理 1 成立。

4 算法描述与分析

4.1 DOA 估计算法

对于优化模型 III 的求解算法设计,首先需要确定算法

的初始值,根据文献[13]所提算法设定初始值为方程 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 的最小二范数解 $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{X}$ 。

对于优化模型 $\min_{\mathbf{s}} F_{\sigma}(\mathbf{s}), \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 可以转化为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{s}} G(\mathbf{s}) = \mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{s} \\ \min_{\mathbf{s}} F_{\sigma}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{2N+1} f_{\sigma}(s_i) \end{cases} \quad (16)$$

上式的第一部分,根据文献[13]可得其解为 $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{s}_k)$ 且其为收敛的。

式(16)中的第二部分用平滑函数的极值近似 l_0 范数,采用修正牛顿法进行求解平滑函数的极值,数学求解模型如式(17)所示。

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \lambda_k \mathbf{P}_k \quad (17)$$

式中: λ_k 是修正牛顿法的迭代步长,且随着 $\sigma \rightarrow 0$, 迭代次数的增加,算法结果接近最优解,迭代步长也需微调,所提算法采用 $\lambda_k = \lambda_0 / 2\sigma^2$, λ_0 为一个常数。 \mathbf{P}_k 是基于双曲复合函数的一阶导数和二阶导数的修正项,其中每一项都是一个正数。所以当 $\sigma \rightarrow 0$ 式(17)是收敛的。递减序列 $\{\sigma_i\}$ 中 σ_1 需为一个较大的值,进而可避免算法结果陷入局部最优,所提算法以文献[14]为参考,设置为 $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 2\max(\hat{\mathbf{s}})$, 递减步长设置为 $\mu = 0.7$ 。

修正牛顿梯度下降法是优化算法中一种常用的方法,其更新方向是由牛顿方向和梯度方向共同决定的,具有牛顿法收敛速度快、梯度下降法保证收敛性等优点。该方法首先要求出双曲复合函数的梯度下降方向和 Hessian 矩阵,进而得到牛顿梯度下降方向 $\mathbf{d}_1 = -\nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{s})^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{s})$ 。为了保证 Hessian 矩阵的正定性,需要对双曲复合函数的二阶导数,即 Hessian 矩阵的对角元素进行修正。双曲复合函数二阶导数如式(18)所示。

$$\frac{\partial^2 f_{\sigma}(s)}{\partial s^2} = \frac{2q |s|^{q-1} e^{-\frac{|s|}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \left[\frac{(q-1) |s|^{-1} - \frac{q |s|^{q-1}}{\sigma^2}}{\sigma^2} - \frac{2q |s|^{q-1} e^{-\frac{|s|}{\sigma^2}}}{\sigma^2 (1 + e^{-\frac{|s|}{\sigma^2}})^2} - \frac{2q |s|^{q-1} e^{-\frac{|s|}{\sigma^2}}}{\sigma^2 (1 + e^{-\frac{|s|}{\sigma^2}})^3} \right] \quad (18)$$

由于 $0 < q < 1$, 双曲复合函数的二次求导函数值无法保证全部都大于零,而 Hessian 矩阵要求矩阵的对角元素大于零,故需要对所求平滑函数牛顿梯度下降方向进行修正,构造一个新的矩阵 $\mathbf{G} = -\nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{s}) - \theta_i \mathbf{I}$, 其中 θ_i 是一个适当的正数, \mathbf{I} 是单位矩阵。所提算法设计的 θ_i 如式(19)所示。

$$\theta_i = \frac{4q^2 |s_i|^{2q-2} (e^{-\frac{|s_i|}{\sigma^2}})^2}{\sigma^4 (1 + e^{-\frac{|s_i|}{\sigma^2}})^3} \quad (19)$$

进而 Hessian 矩阵的所有对角元素都大于 0。式中参数 q 的值取 0.5, 故可得到修正牛顿方向为:

$$\mathbf{d}_2 = -\mathbf{G}^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{s}) = \left[-\frac{2\sigma^2 |s_1|}{2\sigma^2 + 3\sqrt{|s_1|}}, \dots, \frac{2\sigma^2 |s_{2N+1}|}{2\sigma^2 + 3\sqrt{|s_{2N+1}|}} \right] \quad (20)$$

以方程 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 的最小二范数解 $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{X}$ 作为算法的初始解,由外循环递减序列 $\{\sigma_i\}$ 为算法内循环提供递减的逼近因子 σ_i , 对于每一个逼近因子,内循环以 \mathbf{d}_2 作为梯度下降方向进行若干次迭代求解,直至外层循环最后一个逼近因子 σ_{\min} , 由内循环求得近似 l_0 范数的最优解,恢复出稀疏信号,并通过谱峰搜索得到 DOA 估计值。

综上所述,算法的具体步骤如下。

步骤 1) 初始化,设置递减序列 $\{\sigma_i\}$ 逼近因子初始值 $\sigma_{\max} = 2\max(\hat{\mathbf{s}})$, 递减序列步长 $\mu = 0.7$, 逼近因子最小值 $\sigma_{\min} = 0.01$ 。算法初值 $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{X}$, 算法迭代步长 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_i = \alpha_0 / 2\sigma_i^2$ 。

步骤 2) 判断 σ_i 是否大于 σ_{\min} 。

步骤 3) 若 $\sigma_i > \sigma_{\min}$, 计算对应于 σ_i 的修正牛顿梯度方向 $\mathbf{d}_2 = -\mathbf{G}^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{s})$ 。

步骤 4) 令 $z = 1$, 采用修正牛顿法结合牛顿迭代式求得 $F_{\sigma}(\mathbf{s})$ 的极值。

(1) 根据步骤 3 求得的 \mathbf{d}_2 依次迭代计算 $\mathbf{s} = \mathbf{s} + \alpha_i \mathbf{d}_2$ 与 $\mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{s})$ 。

(2) $z = z + 1$; 如果 $z \leq 10$, 过程(1)和(2)重复。

步骤 5) 更新 $\sigma_{i+1} = \sigma_i \mu$ 。

步骤 6) 判断 $\sigma_i < \sigma_{\min}$, 若不成立, 转步骤 3)。若成立, 停止迭代, 输出 \mathbf{s} 。

4.2 算法复杂度分析

对所提算法进行复杂度分析,算法的感知矩阵 \mathbf{A} 为 $M \times (2N+1)$ 维矩阵, \mathbf{s} 为 $2N+1$ 维向量, \mathbf{X} 为 $M \times 1$ 维向量。假设 T 为矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{s}$ 或 $\mathbf{A}^T\mathbf{X}$ 的计算时间,由于矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{s} 是稀疏的,则矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{s}$ 或 $\mathbf{A}^T\mathbf{X}$ 的相乘计算量小于 $2M \times (2N+1)$ 。 $Q = O(\log(N))$ 表示求得最优解所需的比特精度要求, ω 表示权值,信号 \mathbf{s} 的稀疏度为 B , 则所提基于双曲复合函数近似 l_0 范数(hyperbolic composite smoothed l_0 norm, HCSL0)算法的复杂度为 $T + O((2N+1)^3)$, 所提到的平滑 l_0 范数算法 NLSL0、WSL0、SL0、ISL0 的计算复杂度分别为 $T + O(B)$ 、 $T + O(2\omega B)$ 、 $T + O(B)$ 、 $T + O(2B)$ 。

5 仿真实验与分析

为验证所提算法的有效性以及在不同阵元数或不同信噪比条件下所提算法的 DOA 估计性能,与正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法、多重信号分类(multiple signal classification, MUSIC)算法、以及其他不同平滑 l_0 范数算法进行对比实验。仿真实验电脑配置为: Intel(R) Core(TM) i5-5200U CPU, 运行 Win10 系统, Matlab2021a 版本运行环境。仿真实验估计指标采用估计

成功率和均方根误差。对于目标信号源的 DOA 估计成功率为角度估计误差小于等于 1° 的次数/实验总次数。DOA 均方根误差的表达式为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{BM_c} \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^{M_c} [\hat{\theta}_{bm} - \theta_{bm}]^2} \quad (21)$$

式中: M_c 为蒙特卡洛实验次数; θ_{bm} 为第 m 次实验第 b 个信号源的 DOA 真实值; $\hat{\theta}_{bm}$ 表示第 m 次实验第 b 个信号源的 DOA 估计值。

实验 1 算法 DOA 估计可行性验证。在均匀线阵中, 阵元数为 16, 信噪比为 5 dB 的条件下, 在空间网格划分中, 两个相干的目标信号源 DOA 信息分别为 -20° 、 30° 以及一个不相干信号源的 DOA 信息为 0° 。所提算法的 DOA 估计结果如图 2 所示。

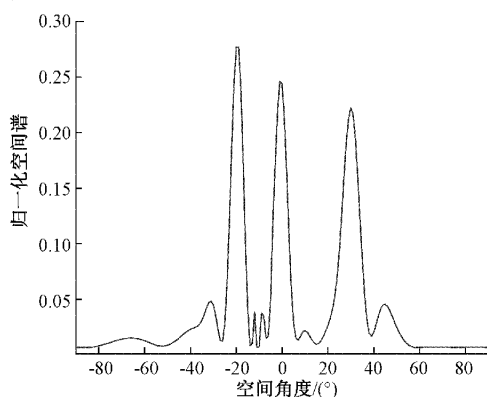


图 2 基于 HCSSL0 算法的 DOA 估计

通过图 2 可知两个相干目标信号源以及一个不相干目标信号源的 DOA 估计值为归一化空间谱中 3 个谱峰所指空间角度, 该实验验证了所提算法不受信号的相干性的影响, 可准确的进行相干信源的 DOA 估计。

实验 2 针对固定阵元数和信噪比的条件下, HCSSL0 算法和对比算法能达到最大允许误差迭代次数实验。阵元数为 16, 信噪比为 10 dB, 最大允许均方根误差为 0.4° , 两个相干信号源的 DOA 信息分别为 -20° 、 30° 。所提 HCSSL0 算法与其他同类型 l_0 范数算法所需迭代次数与均方根误差如表 1 所示。

表 1 不同算法所需迭代次数及均方根误差

算法	迭代次数	均方根误差/ $(^\circ)$
HCSSL0	2	0.312 2
NLSL0	6	0.313 4
SL0	8	0.387 3
ISL0	16	0.374 2
WSL0	19	0.331 7

通过表 1 中数据可知所提 HCSSL0 算法在相同的实验条件下, 以较少的迭代次数得到更精确的 DOA 估计值。

实验 3 针对信噪比不变, 不同阵元数条件下, DOA 估计算法性能对比实验。蒙特卡洛实验次数为 1 000, 信噪比 5 dB, 两个相干目标信号源 DOA 信息分别为 -20° 、 30° 。在阵元数从 12~20 的变化范围内, HCSSL0 算法和对比算法的 DOA 估计均方根误差和成功率变化如图 3 和图 4 所示。

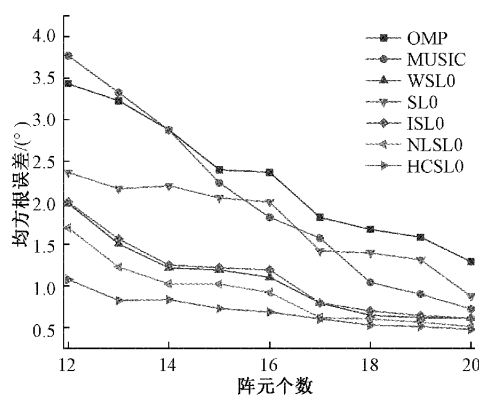


图 3 不同阵元数时各算法的 DOA 估计均方根误差

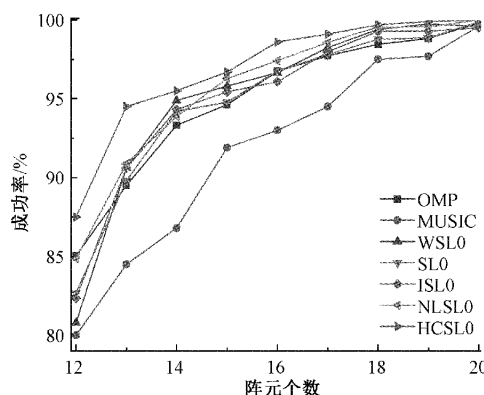


图 4 不同阵元数时各算法的 DOA 估计成功率

从图 3 和 4 可知随阵元数的增大, 各类算法的均方根误差也随之不断减小, 估计成功率则不断提高。与其他算法相比, 所提 HCSSL0 算法对目标信号源的 DOA 估计的均方根误差较小且成功率较高, 在阵元数为 16 时, 所提 HCSSL0 算法的 DOA 估计成功率已超过 98%。

实验 4 针对不同信噪比条件下, 各类算法 DOA 估计算法性能对比。蒙特卡洛实验次数为 1000, 阵元数为 16, 两个信号的 DOA 信息分别为 -20° 、 30° 。信噪比在 0 dB 到 10 dB 的范围内变化, 各类算法的 DOA 均方根误差变化如图 5 所示, 其中包含了克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB)。HCSSL0 算法以及对比算法的 DOA 估计成功率如图 6 所示。

从图 5 和 6 中可知在不同信噪比条件下, HCSSL0 算法与其他算法相比, 均具有较低的均方根误差和较高的估计成功率。当信噪比为 5 dB 时, 所提 HCSSL0 算法 DOA 估计的均方根误差为 0.6856° , 在其之后, 所提算法的均方根误差基本接近于克拉美罗界, 充分验证了所提 HCSSL0 算

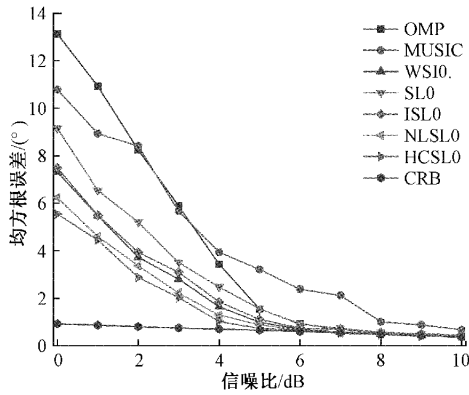


图 5 不同信噪比时各算法的 DOA 估计均方根误差

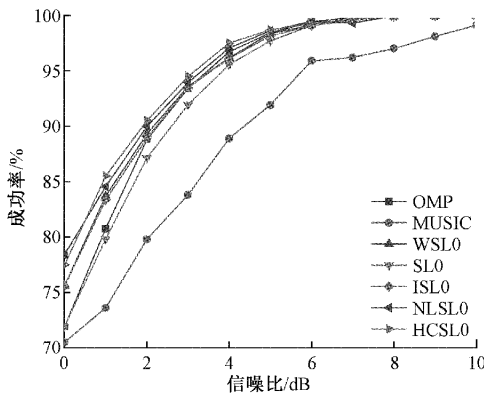


图 6 不同信噪比时各算法的 DOA 估计成功率

法较好的估计性能。

实验 5 各类平滑近似 l_0 范数算法收敛时间和均方根误差对比实验。阵元数为 16, 信噪比为 5 dB, 蒙特卡洛实验次数为 1 000, 两个相干目标信号源 DOA 信息分别为 $-20^\circ, 30^\circ$ 。所提 HCSL0 算法与 NLSL0 算法、SL0 算法、ISL0 算法、WSL0 算法的运行时间和均方根误差如表 2 所示。

表 2 不同算法运算时间及均方根误差

算法	HCSL0	NLSL0	SL0	ISL0	WSL0
时间/(s)	0.012 9	0.015 7	0.075 8	0.013 8	0.083 1
误差/ $^\circ$	0.685 6	0.748 3	1.557 2	1.107 4	1.103 5

由表 2 中数据可知所提 HCSL0 算法, 运行时间和均方根误差均低于 NLSL0 算法、SL0 算法、WSL0 算法。该实验验证了所提算法的 DOA 估计性能优于同类近似 l_0 范数算法。

6 结 论

通过对压缩感知 DOA 估计方法的研究与分析, 提出了一种基于双曲复合函数的近似 l_0 范数的 DOA 估计算法。将求解 l_0 范数问题转化为双曲复合函数的最优化问题, 以方程 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 的最小二范数解作为优化模型的初始

解, 在逼近序列 $\{\sigma_i\}$ 的控制下, 利用双曲复合函数的二阶导修正项作为下降方向的梯度, 通过修正牛顿法求得最优解, 进而得到目标信号源的 DOA 的估计值。通过算法分析和仿真验证, 所提算法在单快拍、低信噪比条件下的计算时间对比的平滑 l_0 范数算法, 且与 OMP、MUSIC、SL0、ISL0、WSL0 和 NLSL0 算法相比, 所提算法具有较高的估计成功率、较低的估计误差、较快的收敛速度。所提算法在阵元数为 16 且信噪比为 5 dB 的条件下, 对于两目标波达方向估计均方根误差为 0.6856° , 估计成功率高于 98%。

参 考 文 献

- [1] 单泽彪, 刘小松, 史红伟, 等. 动态压缩感知波达方向跟踪算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2018, 48(6): 1938-1944.
- [2] 单泽彪, 王宇祥, 常立民, 等. 冲击噪声背景下相干信号 DOA 估计[J]. 电子测量技术, 2022, 45(15): 166-171.
- [3] 刘学承, 朱敏, 武岩波. 适用任意平面阵列的二维宽带 DOA 快速估计算法[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(7): 102-111.
- [4] DIKSHA T, VIKAS B, RAJU T S. Proximal gradient method based robust Capon beamforming against large DOA mismatch[J]. Frequenz, 2021, 75(7-8): 259-266.
- [5] NOH H M, KIM H J, KIM H N. DOA estimation of combining time modulated arrays with beamspace MUSIC algorithm[J]. The Journal of Korean Institute of Communications and Information Sciences, 2020, 45(6): 951-960.
- [6] XIAO M L, DUAN Z B, YANG Z L. A weighted forward-backward spatial smoothing DOA estimation algorithm based on TLS-ESPRIT: Regular section[J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2021, 104(6): 881-884.
- [7] HAN B, LUO L G, SHENG G H, et al. Partial discharge direction-of-arrival estimation in air-insulated substation by UHF wireless array and RSSI maximum likelihood estimator[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2020, 14(23): 5491-5497.
- [8] 王雪琼, 郭静波. 动态压缩感知理论研究综述[J]. 电子测量与仪器学报, 2020, 34(10): 1-16.
- [9] 李帅永, 毛维培, 程振华, 等. 基于 VMD 和 K-SVD 字典学习的供水管道泄漏振动信号压缩感知方法[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(3): 49-60.
- [10] 陈鑫, 张旭东, 朱耀麟, 等. 基于压缩感知的自适应 V2V 稀疏信道估计算法[J]. 国外电子测量技术, 2022, 41(12): 56-62.
- [11] PENG J G, YUE S G, LI H Y. NP/CMP equivalence: A phenomenon hidden among sparsity models L0

- minimization and LP minimization for information processing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(7):4028-4033.
- [12] 赵瑞珍,林婉娟,李浩,等. 基于光滑 l_0 范数和修正牛顿法的压缩感知重建算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2012, 24(4):478-484.
- [13] LI H Y, ZHANG Q, CUI A G, et al. Minimization of fraction function penalty in compressed Sensing[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2020, 31(5): 1626-1637.
- [14] 单泽彪,常立民,刘小松,等. 基于自然对数复合函数近似 l_0 范数的DOA估计[J]. 兵工学报, 2023, 44(5): 1521-1528.
- [15] 单泽涛,刘小松,单泽彪,等. 基于改进平滑 l_0 范数的DOA估计算法[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2017, 35(6):603-607.
- [16] 单泽彪,刘小松,王春阳,等. 基于加权平滑 l_0 范数的单快拍波达方向估计[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2017, 40(5):44-48, 63.
- [17] 周洁容,李海洋,凌军,等. 基于非凸复合函数的稀疏信号恢复算法[J]. 自动化学报, 2022, 48(7): 1782-1793.

作者简介

单泽彪, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为弱信号检测、阵列信号处理、压缩感知技术。

E-mail: zbshan@126.com

薛泓垚, 硕士研究生, 主要研究方向为传感与信号处理、压缩感知技术。

E-mail: 1353460112@qq.com

刘小松(通信作者), 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为信息感知与先进控制技术、复杂系统建模仿真与控制。

E-mail: liuxs@cust.edu.cn