

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2211515

OFDM 系统中一种低复杂度的 TOA 和 DOA 联合估计算法^{*}

李 铭 侯艳丽 苏 佳

(河北科技大学信息科学与工程学院 石家庄 050018)

摘 要: 针对正交频分复用(OFDM)系统利用求根多重信号分类(Root-MUSIC)算法进行到达时间(TOA)和波达方向(DOA)联合估计时,由于多项式求根过程中所求根为共轭对称形式存在计算冗余的问题,提出一种基于谱分解的 TOA 和 DOA 联合估计算法——SF-Root-MUSIC 算法。该算法基于劳伦特多项式的结构特点,利用谱分解将求根多项式的阶次降低一半,降低了计算复杂度,完成独立的 TOA 和 DOA 估计,并通过构造代价函数进行参数配对,完成联合估计。仿真结果表明,SF-Root-MUSIC 算法与 Root-MUSIC 算法具有相似的估计性能,且复杂度更低,在阵元数为 12、子载波个数为 512、快拍数为 512 时复杂度可降低 69.94%,在保证精度的同时,以更低的复杂度实现 TOA 和 DOA 的联合估计,更适用于实时计算。

关键词: 正交频分复用;到达时间;波达方向;Root-MUSIC 算法;谱分解

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.50

A low-complexity joint TOA and DOA estimation in OFDM system

Li Ming Hou Yanli Su Jia

(School of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China)

Abstract: When the OFDM system uses the Root-MUSIC algorithm to complete the joint TOA and DOA estimation, the required roots appeared in the form of conjugating symmetry which will be computational redundancy. Aiming at this problem, a Root-MUSIC algorithm based on spectral factorization—SF-Root-MUSIC algorithm is proposed. Based on the structural characteristics of Laurent polynomials, the algorithm uses spectral decomposition to reduce the order for the root polynomial by a half, which reduces the computational complexity, completes independent delay and angle estimation, and constructs a cost function of parameter pairing, complete the joint estimation. The simulation results show that the SF-Root-MUSIC algorithm has similar estimation performance with the Root-MUSIC algorithm, and its complexity is lower. When the number of array elements is 12, the number of subcarriers is 512 and the number of snapshots is 512, the complexity can be reduced by 69.94%. The proposed algorithm can achieve the joint estimation of TOA and DOA with lower complexity while ensuring the accuracy, which verifies the proposed algorithm is more suitable for real-time computing.

Keywords: OFDM; time of arrival; direction of arrival; Root-MUSIC algorithm; spectral factorization

0 引 言

正交频分复用(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM)技术具有抗信道衰落、抗多径干扰、频谱利用率高等优点,已广泛应用于卫星通信系统、移动通信系统和无线局域网等^[1-8]。随着社会的发展,人们对位置服务的要求越来越高。但在地下或室内场景等环境下,现

有卫星定位系统无法克服电磁波衰减的问题,不能有效对目标进行定位。OFDM 系统不但可以为用户提供高速数据服务,同时可以利用现有设施提供较高精度的定位服务。因此,近年来以 OFDM 系统为基础的定位研究得到了研究人员的广泛关注。

到达时间(time of arrival, TOA)和波达方向(direction of arrival, DOA)是基于 OFDM 定位系统的两

收稿日期:2022-09-25

^{*} 基金项目:河北省重点研发计划(21355901D)项目资助

个重要参数。近年来,一些超分辨率算法被用于参数估计。其中主要包括:矩阵束(matrix pencil, MP)算法^[9]、多重信号分类(multiple signal classification, MUSIC)算法^[10]、Root-MUSIC 算法^[11]、PM(propagator method)传播算子算法^[12]以及旋转不变技术(estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT)算法^[13-14]等。文献[15]提出一种二维矩阵束算法以实现时延和角度的联合估计,该算法虽然计算复杂度低,但牺牲了有效阵元和带宽。文献[16]提出一种到达时间和波达方向联合估计算法,该算法采用 MUSIC 算法通过单天线的频域数据完成时延估计,利用阵列数据完成角度估计,但未给出时延和角度的配对算法,且计算复杂度较高。文献[17]提出一种二维搜索的 TOA 和 DOA 联合估计 2D-MUSIC 算法,该方法解决了配对问题,但其计算复杂度非常高,难以在实践中应用。文献[18]利用 PM 算子得到噪声子空间并构造谱函数,通过二维谱峰搜索完成到达时间和波达方向联合估计。该算法无需特征值分解,但仍旧需要复杂度较高的谱峰搜索过程,同时低信噪比条件下估计精度较差。文献[19]将 Root-MUSIC(root multiple signal classification)算法引入 TOA 和 DOA 联合估计中,通过多项式求根取代复杂的谱峰搜索过程,最后通过参数配对完成 TOA 和 DOA 的快速联合估计。文献[20]通过 ESPRIT 算法获得波达方向估计值,但需要利用波达方向估计值进行一维谱峰搜索以估计到达时间,谱峰搜索过程复杂。为保证 OFDM 系统的定位精度的同时降低算法复杂度,提出一种基于谱分解的低复杂度 TOA 和 DOA 估计算法——SF-Root-MUSIC(spectral factorization root MUSIC)算法。该算法利用劳伦特(Laurent)多项式的结构特点,通过谱分解将求根多项式的阶次降低一半,完成独立的 TOA 和 DOA 估计,通过参数配对完成 TOA 和 DOA 的联合估计。理论分析及仿真实验验证了所提算法的性能。

1 系统模型

考虑 M 个阵元组成的等距线阵模型如图 1 所示,信源与线阵之间的距离远大于阵元间距,即 $R \gg d$,可认为信号平行入射到各阵元。 R 为信号源与天线阵列的距离, d 为阵元间距。

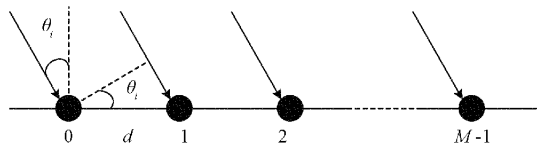


图 1 天线阵列示意图

以阵元 0 为参考阵元, τ_i 和 θ_i 分别表示第 i 条路径到阵元 0 的传播时延和波达方向,则其到达第 m 个阵元的传播时延为 $\tau_{m,i}$, 光速为 c 。由图 1 可知,到达时间和波达方向关系如下:

$$\tau_{m,i} = \tau_i + \frac{md \sin \theta_i}{c}, 0 \leq m \leq M-1 \quad (1)$$

有 N 个正交子载波的 OFDM 信号的时域表达式为:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{j2\pi(f_0+k/T)t}, 0 \leq t \leq T+T_G \quad (2)$$

其中,OFDM 信号的第 k 个子载波上调制的复信号用 b_k 表示;第 k 个子载波的频率用 $f_0+k/T, k=0,1,2,\dots, N-1$ 表示; T 为 OFDM 符号长度, T_G 为循环前缀的长度。

阵元 m 的信道冲击响应为:

$$h_m(t) = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i \delta(t - \tau_{m,i}), 0 \leq m \leq M-1 \quad (3)$$

其中, L_p 为信道的多径数; $a_i = |a_i| e^{j\varphi_i(\tau)}$ 为第 i 条路径的复衰落系数,相位 $\varphi_i(\tau)$ 服从 $(0, 2\pi)$ 的均匀分布。

则第 m 个阵元上的接收信号可以表示为:

$$y_m(t) = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i s(t - \tau_{m,i}) + n_m(t) \quad (4)$$

式中: $n_m(t)$ 为复高斯白噪声。

$y_m(t)$ 经过 FFT 变换后,可得到第 k 个子载波到达第 m 个阵元的信道频域响应估计为:

$$\hat{x}_{m,k} = H_k + n_{m,k} = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i e^{-j2\pi(f_0+k/T)(\tau_i + \frac{md \sin \theta_i}{c})} + n_{m,k} = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i e^{-j2\pi f_0 \tau_i} e^{-j2\pi \frac{k}{T} (\tau_i + \frac{md \sin \theta_i}{c})} e^{-j2\pi f_0 \frac{md \sin \theta_i}{c}} + n_{m,k} \quad (5)$$

式中: H_k 为真实频域信道冲击响应, $n_{m,k}$ 表示零均值,方差为 σ^2 的加性复高斯白噪声。

考虑到天线阵列不同阵元上产生的时延 $\frac{md \sin \theta_i}{c}$ 相对于 τ_i 可以忽略,则式(5)可以简化为:

$$\hat{x}_{m,k} = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i e^{j2\pi(f_0+k/T)\tau_i} e^{-j2\pi \frac{md \sin \theta_i}{\lambda}} + n_{m,k} \quad (6)$$

将式(6)写成向量形式为:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}_m + \mathbf{n}_m = \mathbf{D}_m(\tau, \theta) \mathbf{a}_m + \mathbf{n}_m \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{D}_m(\tau, \theta) = \begin{bmatrix} d_{m,0}(\tau_0, \theta_0) & d_{m,0}(\tau_1, \theta_1) & \cdots & d_{m,0}(\tau_{L_p-1}, \theta_{L_p-1}) \\ d_{m,1}(\tau_0, \theta_0) & d_{m,1}(\tau_1, \theta_1) & \cdots & d_{m,1}(\tau_{L_p-1}, \theta_{L_p-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m,N-1}(\tau_0, \theta_0) & d_{m,N-1}(\tau_1, \theta_1) & \cdots & d_{m,N-1}(\tau_{L_p-1}, \theta_{L_p-1}) \end{bmatrix}_{N \times L_p}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{a}_m = [a'_0, a'_1, \dots, a'_{L_p-1}]^T$$

$$\mathbf{n}_m = [n_0, n_1, \dots, n_{N-1}]^T \quad (8)$$

式中: $d_{m,k}(\tau_i, \theta_i) = e^{-j2\pi(f_0 + \frac{k}{T})\tau_i} e^{-j2\pi \frac{md \sin \theta_i}{\lambda}}$ 。

则 M 个阵元的信道频域响应估计矢量可以表示为:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{M-1} \end{bmatrix} + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0(\tau, \theta) \\ \mathbf{D}_1(\tau, \theta) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{M-1}(\tau, \theta) \end{bmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{D}(\tau, \theta) \mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{D} = [\mathbf{d}(\tau_0, \theta_0), \mathbf{d}(\tau_1, \theta_1), \dots, \mathbf{d}(\tau_{L_p-1}, \theta_{L_p-1})]_{MN \times L_p} \\ \mathbf{d}(\tau_i, \theta_i) = [d_0^T(\tau_i, \theta_i) \quad d_1^T(\tau_i, \theta_i) \quad \dots \quad d_{M-1}^T(\tau_i, \theta_i)]^T \end{cases} \quad (10)$$

信道频域响应估计的协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} 为:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} \quad (11)$$

对 \mathbf{R}_{xx} 进行特征值分解得:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H \quad (12)$$

可以发现, \mathbf{R}_{xx} 的特征值具有如下分布,

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{L_p-1} = \lambda_{L_p} = \dots = \lambda_{N-1} = \sigma^2 \quad (13)$$

信号子空间 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{L_p-1}]$ 由前 L_p 个较大的特征值对应的特征向量构成; 噪声子空间 $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{L_p}, \mathbf{u}_{L_p+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1}]$ 由后 $N - L_p$ 个较小的特征值对应的特征向量组成。

其中, 式(9)包含到达时间和波达方向二维参数信息, 下面讨论二维参数联合估计方法。

2 基于谱分解的 TOA 和 DOA 联合估计算法

2.1 传统 2D-MUSIC 算法

二维 MUSIC 算法利用信号子空间和噪声子空间的正交性构造基于 TOA 和 DOA 的二维伪谱函数如下:

$$P_{2D-MUSIC}(\tau, \theta) = \frac{1}{\mathbf{d}^H(\tau, \theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{d}(\tau, \theta)} \quad (14)$$

令 τ 和 θ 为变量, 对式(14)进行二维谱峰搜索获得到达时间估计值 τ_i 和波达方向估计值 θ_i , 并且可以实现 τ_i 和 θ_i 自动配对。但该算法需要进行二维谱峰搜索, 计算复杂度较高且极其耗时。

Root-MUSIC 算法是二维 MUSIC 算法的多项式求根形式, 利用伪谱函数的分母构造多项式, 用多项式求根代替谱峰搜索, 来获得 OFDM 系统的到达时间和波达方向估计值。与二维 MUSIC 算法相比, Root-MUSIC 算法有效降低算法的计算复杂度, 且与 MUSIC 算法具有相似的估计性能^[16]。

2.2 改进算法描述

在 OFDM 系统的 TOA 和 DOA 联合估计过程中, 针对 Root-MUSIC 算法中所求根为共轭对称形式存在计算冗余导致算法复杂度较高这一问题, 提出一种基于谱分解的 TOA 和 DOA 联合估计算法——SF-Root-MUSIC 算法。该算法主要包括 3 部分: 基于谱分解完成 TOA 估计、基于

谱分解完成 DOA 估计、构造代价函数进行 TOA 和 DOA 参数配对。算法具体描述如下。

1) 基于谱分解的 TOA 估计算法

参考阵元的信道频域响应估计矢量为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,:} = \mathbf{H}_{0,:} + \mathbf{n}_{0,:} = \mathbf{V}(\tau) \mathbf{a}' + \mathbf{n}_{0,:} \quad (15)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_{0,:}$ 和 $\mathbf{H}_{0,:}$ 分别是信道频域估计矢量和信道频域响应矢量; $\mathbf{V} = [\mathbf{v}(\tau_0), \mathbf{v}(\tau_1), \dots, \mathbf{v}(\tau_{L_p-1})]^T$ 为子载波流形矩阵, 其中 $\mathbf{v}(\tau_i) = [1, e^{-j2\pi\tau_i/T}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)\tau_i/T}]^T$ 为导向矢量; $\mathbf{a}' = [a'_0, a'_1, \dots, a'_{L_p-1}]^T$ 为复衰落系数矢量, $a'_i = a_i e^{-j2\pi f_0 \tau_i}$ 。 $\mathbf{n}_{0,:}$ 为加性高斯白噪声矢量。

针对参考阵元, 通过 K 个快拍的数据, 对协方差矩阵进行特征分解:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_{0,:}, \mathbf{x}_{0,:}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\mathbf{x}}_{0,:} \hat{\mathbf{x}}_{0,:}^H = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H \quad (16)$$

利用信号子空间和噪声子空间的正交性, 可得一维谱峰搜索函数:

$$P_{MUSIC}(\tau) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\tau) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{v}(\tau)} \quad (17)$$

根据式(17), 得到 Root-MUSIC 算法的求根多项式为:

$$f_1(z) = \mathbf{p}^H(z) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) \quad (18)$$

式中: $\mathbf{p}(z) = [1 \quad z \quad \dots \quad z^{N-1}]^T$, $z = \exp(-j2\pi\tau/T)$ 。根据 Pisarenko 谐波分解的思想, 对 $f_1(z)$ 求根即可得到 OFDM 系统的 TOA 估计值。考虑到 $f_1(z)$ 包含 z^* 项, 会使得 τ 的求解过程变得复杂。已知 $z = \exp(-j2\pi\tau/T)$, 即 $z^* = \exp(j2\pi\tau/T)$, $z \cdot z^* = 1$, 因此 $z^* = 1/z$ 。为了简化计算, 式(18)可以修正为:

$$f_1(z) = \mathbf{p}^H(z) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) = \mathbf{p}^T(z^*) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) = \mathbf{p}^T(z^{-1}) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) \quad (19)$$

为了解方便, 将式(19)修正为:

$$f_1(z) = z^{N-1} \mathbf{p}^T(z^{-1}) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) \quad (20)$$

多项式 $f_1(z)$ 的阶数为 $2(N-1)$, 且矩阵 $\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$ 具有埃尔米特属性, 因此多项式 $f_1(z)$ 存在 $(N-1)$ 对关于单位圆镜像对称的复根。其中, 有 L_p 个根 $z_{\tau_1}, z_{\tau_2}, \dots, z_{\tau_{L_p}}$ 分布在单位圆上, 即:

$$z_{\tau_i} = \exp(-j2\pi\tau_i/T), i = 1, 2, \dots, L_p \quad (21)$$

可得到到达时间估计值为:

$$\tau_i = -\frac{\text{angle}(z_{\tau_i})T}{2\pi}, i = 1, 2, \dots, L_p \quad (22)$$

由式(19)可知, 多项式 $f_1(z)$ 为 $2(N-1)$ 阶多项式, 有 $(N-1)$ 对关于单位圆共轭对称的根, 即只需求得其中的 $(N-1)$ 个根, 即可通过共轭求得其余 $(N-1)$ 个根。因此, 多项式求根过程中存在计算冗余。同时考虑到子载波个数较大时, 算法的复杂度更高。为降低复杂度, 提出一种基于谱分解的 TOA 估计算法——SF-Root-MUSIC 算法。

考虑到求根多项式 $f_1(z)$ 为 Laurent 多项式, 所求根

具有共轭对称特性而存在冗余。基于这一特点, SF-Root-MUSIC 算法通过谱分解将求根多项式的阶次减半, 把 $f_1(z)$ 分解成两个 $(N-1)$ 阶多项式乘积的形式, 仅需对谱分解得到的 $(N-1)$ 阶多项式求根, 即可得到 OFDM 系统的到达时间估计值, 有效降低了算法的计算量。SF-Root-MUSIC 算法具体描述如下。

设多项式 $f_1(z)$ 中 z^i 和 z^{-i} 的系数分别为 b_i 和 b_{-i} , 即式(20)可以表示如下:

$$f_1(z) = \sum_{i=(N-1)}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (23)$$

由矩阵 $\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$ 的埃尔米特属性可知, b_i 和 b_{-i} 是共轭的, 即:

$$b_i = b_{-i}^* \quad (24)$$

因此可知 $f_1(z)$ 为 Laurent 多项式, 且 $f_1(z) = \mathbf{p}^H(z) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{p}(z) = \|\mathbf{p}^H(z) \mathbf{U}_N\|^2 \geq 0$ 。根据文献[21]中引理 1 可知, 多项式 $f_1(z)$ 可以分解成两个 $(N-1)$ 阶多项式 $f_p(z)$ 和 $f_p^*(1/z^*)$ 的乘积形式, 即:

$$f_1(z) = r_p f_p(z) f_p^*(1/z^*) \quad (25)$$

r_p 和 $f_p(z)$ 表示如下:

$$r_p = \frac{b_{(N-1)}}{(-1)^{(N-1)} \prod_{i=1}^{N-1} a_i} \quad (26)$$

$$f_p(z) = \prod_{i=1}^{(N-1)} (1 - a_i z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{(N-1)} z^{-(N-1)} \quad (27)$$

由式(25)可知, 若 z_0 是 $f_1(z)$ 的一个非零根, 则 $f_1(z)$ 必定存在另一个非零根 z_0^{-*} 。多项式 $f_1(z)$ 可以分解为两个 $(N-1)$ 阶多项式 $f_p(z)$ 和 $f_p^*(1/z^*)$ 。多项式 $f_p(z)$ 的 $(N-1)$ 个根 $\{z_i\}$ 位于单位圆内或单位圆上, 多项式 $f_p^*(1/z^*)$ 的 $(N-1)$ 个根 $\{z_i^{-*}\}$ 位于单位圆外或单位圆上, 且 $f_p(z)$ 和 $f_p^*(1/z^*)$ 的根关于单位圆共轭对称。因此, 只需求解多项式 $f_p(z)$ 的根 $\{z_i\}$, 进而可得到全部的根。同理, 也可通过求解多项式 $f_p^*(1/z^*)$ 的根得到全部的根。基于此, 通过谱分解方法^[21]对求根多项式 $f_1(z)$ 进行分解, 该方法的实现步骤如下:

步骤(1): 构造 $(N \times 2)$ 维矩阵 $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0$ 中的元素为式(18)中 $f_1(z)$ 的系数, 则 \mathbf{B}_0 可以表示为:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-(N-2)} & b_{-(N-1)} \\ b_{-1} & b_{-2} & \dots & b_{-(N-1)} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (28)$$

式中: b_0 为多项式 $f_1(z)$ 的常数项。

步骤(2): 重复下面的步骤直至 $\|\tilde{\mathbf{b}}_{1,k} - \tilde{\mathbf{b}}_{1,k-1}\|$ 收敛, 其中 $\tilde{\mathbf{b}}_{1,k}, \tilde{\mathbf{b}}_{1,k-1}$ 分别为矩阵 $\mathbf{B}_k, \mathbf{B}_{k-1}$ 的第一列。

① $\mathbf{B}_k, \mathbf{B}_{k-1}, \mathbf{T}_k$ 关系如下:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{T}_k \quad (29)$$

$$\mathbf{T}_k = \frac{1}{\sqrt{1-(\beta)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta^* & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

其中, $\beta = \frac{[\mathbf{B}_{k-1}]_{1,2}}{[\mathbf{B}_{k-1}]_{1,1}}$, 即 β 为 \mathbf{B}_{k-1} 第 1 行两个元素的

比值。

② 将①中得到的矩阵 \mathbf{B}_k 的第 1 列不动, 第 2 列的元素上移一位。

③ 设置谱分解阈值 th , 检查 $\|\tilde{\mathbf{b}}_{1,k} - \tilde{\mathbf{b}}_{1,k-1}\|$ 是否收敛。若 $\|\tilde{\mathbf{b}}_{1,k} - \tilde{\mathbf{b}}_{1,k-1}\| < th$ 。则满足收敛条件, 进行后续步骤。若不满足收敛条件, 返回①中直到满足 $\|\tilde{\mathbf{b}}_{1,k} - \tilde{\mathbf{b}}_{1,k-1}\| < th$ 。通过迭代可以求得 $(N-1)$ 阶多项式 $f_p(z)$, 其系数为矩阵 \mathbf{B}_k 的第一列的元素 $\tilde{\mathbf{b}}_{1,k}$ ^[21]。

通过谱分解, 多项式 $f_1(z)$ 可以分解为多项式 $f_p(z)$ 和 $f_p^*(1/z^*)$ 的乘积。通过步骤(2)求得 $f_p(z)$, 再通过 $f_p(z)$ 求根得到 $(N-1)$ 个位于单位圆内或单位圆上的根, 进而通过式(22)估计出 τ_i , 即可得到 OFDM 系统的 TOA 估计值。在实际中, 由于受到多径效应等各种因素的影响, 求得 L_p 个接近于单位圆上的根即可计算得到到达时间估计值。

到达时间估计值也可以通过多项式 $f_p^*(1/z^*)$ 求根得到。通过 z^i 的系数构造矩阵 \mathbf{B}_0 得到的多项式为 $f_p(z)$, 而通过 z^{-i} 的系数构造矩阵 \mathbf{B}_0 得到的多项式为 $f_p^*(1/z^*)$, 即上述谱分解过程步骤(1)中构造的 $(N \times 2)$ 维矩阵如下:

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-(N-2)} & b_{-(N-1)} \\ b_{-1} & b_{-2} & \dots & b_{-(N-1)} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (31)$$

剩余步骤同上。同时, 由于 $f_p(z)$ 和 $f_p^*(1/z^*)$ 的系数是共轭对称的, 也可以不重新构造 \mathbf{B}_0 矩阵, 通过步骤(2)获得多项式 $f_p^*(1/z^*)$, 其系数对应于矩阵 \mathbf{B}_k 的第 1 列的元素 $\tilde{\mathbf{b}}_{1,k}$ 的共轭 $\tilde{\mathbf{b}}_{1,k}^*$ 。

2) 基于谱分解的 DOA 估计算法

M 个阵元的接收信号在第一个频域采样点的信道频域响应估计矢量可以表示为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{:,0} = \mathbf{H}_{:,0} \mathbf{a} + \mathbf{n}_{:,0} = \mathbf{V}_A(\theta) \mathbf{a} + \mathbf{n}_{:,0} \quad (32)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_{:,0}$ 和 $\mathbf{H}_{:,0}$ 分别为信道频域估计矢量和信道频域响应矢量; $\mathbf{V}_A = [\mathbf{v}_A(\theta_0), \mathbf{v}_A(\theta_1), \dots, \mathbf{v}_A(\theta_{L_p-1})]^T$ 表示阵列流型矩阵, 其中 $\mathbf{v}_A(\theta_i) = [1, e^{-j2\pi d \sin\theta_i/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi d \sin\theta_i(M-1)/\lambda}]^T$ 为导向矢量; $\mathbf{a} = [a_0', a_1', \dots, a_{L_p-1}']^T$ 为复衰落系数矢量, $a_i' = a_i e^{-j2\pi f_0 \tau_i}$ 。 $\mathbf{n}_{:,0}$ 为加性高斯白噪声矢量。

对 $\hat{\mathbf{x}}_{:,0}$ 的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{\hat{\mathbf{x}}_{:,0} \hat{\mathbf{x}}_{:,0}}$ 进行特征分解, 即:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\hat{\mathbf{x}}_{:,0} \hat{\mathbf{x}}_{:,0}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_N \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_N \tilde{\mathbf{U}}_N^H \quad (33)$$

利用信号子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_s$ 和噪声子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_N$ 的正交性, 可得一维谱峰搜索函数如下:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{v}_A^H(\theta) \tilde{\mathbf{U}}_N \tilde{\mathbf{U}}_N^H \mathbf{v}_A(\theta)} \quad (34)$$

根据式(34), 得到 Root-MUSIC 算法的求根多项式为:

$$f_2(z) = \mathbf{p}^H(z) \tilde{\mathbf{U}}_N \tilde{\mathbf{U}}_N^H \mathbf{p}(z) \quad (35)$$

同理,利用 2.2 节(1)中谱分解的方法对式(35)进行处理,可求得波达方向估计为:

$$\theta_i = \arcsin(-angle(z_{\theta_i})/\pi) \quad (36)$$

由于所得到达时间和波达方向是分开估计的,因此需要对估计出的到达时间和波达方向进行参数配对。

3) 参数配对

利用参考阵元 0 和 1 的信道频域响应估计,构造矩阵如下:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{0,:} \\ \hat{\mathbf{x}}_{1,:} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0(\tau, \theta) \\ \mathbf{D}_1(\tau, \theta) \end{bmatrix} \mathbf{a} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0,:} \\ \mathbf{n}_{1,:} \end{bmatrix} = \mathbf{D}'(\tau, \theta) \mathbf{a} + \mathbf{n}' \quad (37)$$

其中,

$$\mathbf{D}' = [\mathbf{d}'(\tau_0, \theta_0), \mathbf{d}'(\tau_1, \theta_1), \dots, \mathbf{d}'(\tau_{L_p-1}, \theta_{L_p-1})] \quad (38)$$

$$\mathbf{d}'(\tau_i, \theta_i) = [1, e^{j2\pi\tau_i/T}, \dots, e^{j2\pi(N-1)\tau_i/T}, e^{j2\pi d \sin \theta_i / \lambda}, \dots, e^{j2\pi d \sin \theta_i / \lambda} e^{j2\pi(N-1)\tau_i/T}]^T \quad (39)$$

构造式(37)的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}$, 并对其进行特征值分解,得到:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H = \mathbf{V}_S \boldsymbol{\Phi}_S \mathbf{V}_S^H + \mathbf{V}_N \boldsymbol{\Phi}_N \mathbf{V}_N^H \quad (40)$$

其中, $\mathbf{V}_S \in \mathbb{C}^{2N \times L_p}$ 和 $\mathbf{V}_N \in \mathbb{C}^{2N \times (2N-L_p)}$ 分别为信号子空间和噪声子空间, $\mathbf{D}'(\tau, \theta)$ 的列向量 $\mathbf{d}'(\tau, \theta)$ 与噪声子空间 \mathbf{V}_N 正交。为完成到达时间和波达方向的配对,可通过求下面代价函数的最小值来完成:

$$h(\tau, \theta) = \mathbf{d}'^H(\tau, \theta) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{d}'(\tau, \theta) \quad (41)$$

即参数配对就是求解最小化代价函数:

$$\{\hat{\tau}_i, \hat{\theta}_i\} = \min_{i,j} h(\hat{\tau}_i, \hat{\theta}_i), i, j = 0, 1, \dots, L_p - 1 \quad (42)$$

参数配对的过程即在估计得到的到达时间集合 $\{\hat{\tau}_i\}_{i=0}^{L_p-1}$ 中选择一个 $\hat{\tau}_i$ 固定不变,将 $\hat{\theta}_i$ 遍历 $\{\hat{\theta}_i\}_{i=0}^{L_p-1}$, 代价函数最小值对应的 $\{\hat{\tau}_i, \hat{\theta}_i\}$ 即为正确的配对值。在配对前求得的到达时间参数估计个数和波达方向参数估计个数均为 L_p , 因此参数配对的遍历远远小于二维搜索的遍历。

SF-Root-MUSIC 算法进行 TOA 和 DOA 联合估计的算法主要步骤可归纳如下:

(1) 对参考阵元的信道频域响应估计的协方差矩阵

$\hat{\mathbf{R}}_{x_{0,i}, x_{0,i}}$ 分解,得到信号子空间 \mathbf{U}_S 和噪声子空间 \mathbf{U}_N ;

(2) 构造求根多项式 $f_1(z)$, 通过谱分解得到 $(N-1)$ 阶多项式 $f_p(z)$, 并对其进行求根得到到达时间参数估计值;

(3) 同理,对 $\hat{\mathbf{R}}_{x_{1,i}, x_{1,i}}$ 特征分解,构造求根多项式 $f_2(z)$, 通过谱分解得到波达方向参数估计值;

(4) 构造矢量的协方差矩阵,对 $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}$ 特征值分解,得到

信号子空间 \mathbf{V}_S 和噪声子空间 \mathbf{V}_N ;

(5) 构造代价函数,通过最小化完成到达时间和波达方向的参数匹配。

2.3 复杂度分析

Root-MUSIC 算法的复杂度主要包括 3 个部分:协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{x_{0,i}, x_{0,i}}$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_{x_{1,i}, x_{1,i}}$ 的构造,复杂度为 $O(N^2 K)$ 和 $O(M^2 K)$; 对 $\hat{\mathbf{R}}_{x_{0,i}, x_{0,i}}$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_{x_{1,i}, x_{1,i}}$ 进行特征分解,复杂度为 $O(N^3)$ 和 $O(M^3)$; 多项式求解,复杂度为 $O(8(N-1)^3)$ 和 $O(8(M-1)^3)$ 。SF-Root-MUSIC 算法通过谱分解,将 $2(N-1)$ 阶多项式降阶为 $(N-1)$ 阶,同时将 $2(M-1)$ 阶多项式降阶为 $(M-1)$ 阶多项式,此时多项式求根的复杂度仅为 $O((N-1)^3)$ 和 $O((M-1)^3)$, 大大降低了算法的计算复杂度。

两种算法的复杂度对比如表 1 所示。

表 1 算法复杂度对比

算法名称	算法复杂度
Root-MUSIC 算法	$O(N^3 + 8(N-1)^3 + N^2 K + M^3 + 8(M-1)^3 + M^2 K)$
SF-Root-MUSIC 算法	$O(N^3 + (N-1)^3 + N^2 K + M^3 + (M-1)^3 + M^2 K)$

设阵元个数为 12, 快拍数为 512, 子载波个数为 128 : 64 : 512。绘制上述两种算法关于子载波个数 N 的复杂度曲线如图 2 所示。从图中可以看出,与 Root-MUSIC 算法相比, SF-Root-MUSIC 算法通过谱分解将求根多项式的阶次减半,有效降低了计算复杂度。特别地,所提算法相较于 Root-MUSIC 算法在子载波个数为 128 时复杂度由 2.68×10^7 降为 1.25×10^7 , 在子载波个数为 512 时复杂度由 1.34×10^9 降为 4.01×10^8 , 减少了运算量。

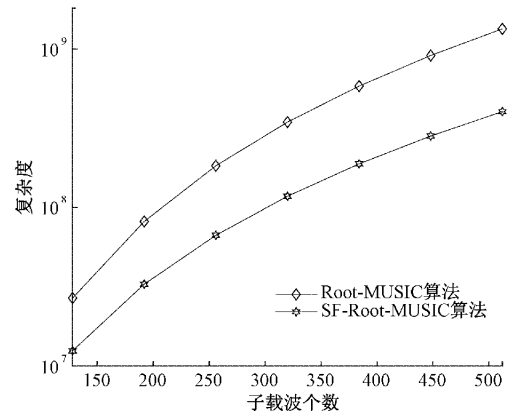


图 2 两种算法的复杂度

3 仿真实验

为了验证本文所提算法的性能,在 Intel(R) Core(TM) 2.5 GHz 处理器、8 GB 内存和 64 位 Windows 10 操作系统

的 PC 机上,通过 MATLAB R2017a 软件对 OFDM 系统进行建模,并通过蒙特卡罗实验对所提算法进行仿真验证并与 Root-MUSIC 算法进行比较分析。OFDM 系统相关参数设置如下:子载波数 $N = 512$,循环前缀长度为 128,OFDM 符号长度 $T = 6.67 \mu\text{s}$,载波频率 $f_0 = 2 \text{ GHz}$,阵元数 $M = 12$,阵元间距 $d = \frac{c}{2f_0} \text{ m}$ 。

采用均方根误差(root mean square error, RMSE)评估算法的性能,到达时间估计均方根误差和波达方向估计均方根误差的定义如下:

$$RMSE_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\tau - \hat{\tau}_p)^2} \quad (43)$$

$$RMSE_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\theta - \hat{\theta}_p)^2} \quad (44)$$

其中, P 表示蒙特卡罗仿真次数, τ 和 θ 分别为到达时间和波达方向, $\hat{\tau}_p$ 和 $\hat{\theta}_p$ 分别为 τ 和 θ 的第 p 个估计值。

3.1 谱分解门限的选取

设置 3 条路径,到达时间分别为 140、180 和 220 ns,波达方向分别为 10° 、 20° 和 30° ,多径分量复衰落系数为 1.0、0.8 和 0.6,快拍数为 512。在信噪比为 $-4 \sim 12 \text{ dB}$ 时,设置谱分解门限为 0.005、0.01、0.03 和 0.05,分别对不同谱分解门限的 SF-Root-MUSIC 算法进行到达时间估计和波达方向估计。设置 Monte Carlo 仿真次数为 200,仿真结果如图 3 和 4 所示。从图中可以看出,算法的 RMSE 随着谱分解门限的减小而降低。设置门限值为 0.005 和 0.01 两种条件时,所提算法的 RMSE 值十分接近。仿真结果表明,当门限值降低到某个值时,SF-Root-MUSIC 算法的到达时间和波达方向估计性能均几乎不变。此后的实验均设置谱分解门限为 0.01。

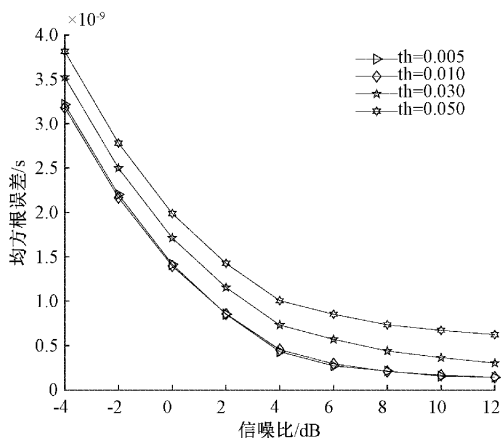


图 3 到达时间均方根误差随不同谱分解门限的变化图

3.2 根分布图

实验条件同 3.1。设置信噪比为 15 dB。图 5(a)为 Root-MUSIC 算法到达时间估计根的分布图,图 5(b)为根分布的局部放大图。图 6(a)为 SF-Root-MUSIC 算法到达

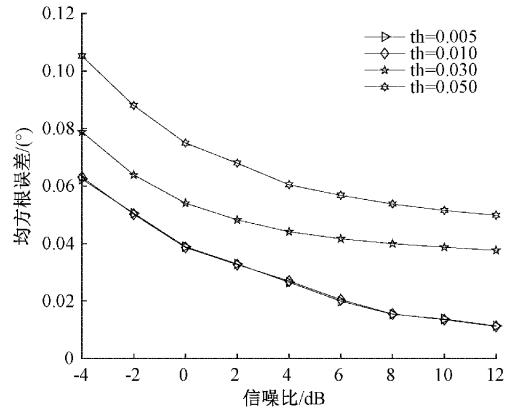
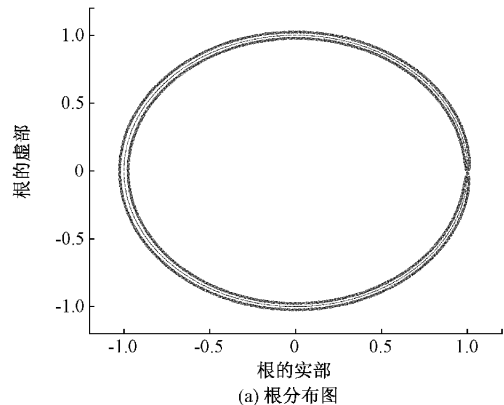
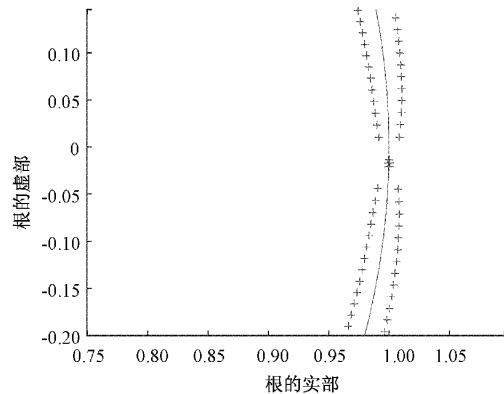


图 4 波达方向均方根误差随不同谱分解门限的变化图

时间估计根的分布图,图 6(b)为根分布的局部放大图。图 7 和 8 分别为波达方向估计中 Root-MUSIC 算法和 SF-Root-MUSIC 算法所构造多项式的根分布情况。由图 5~8 可以看出,Root-MUSIC 算法中的多项式包括 $(N - 1)$ 对和 $(M - 1)$ 对关于单位圆共轭对称的根,而 SF-Root-MUSIC 算法中的多项式仅包括 $(N - 1)$ 个和 $(M - 1)$ 个单位圆内或单位圆上的根。所提算法与 Root-MUSIC 算法相比,所求根的个数降低了一半,这是因为所提算法通过降低多项式的阶数降低了计算复杂度。

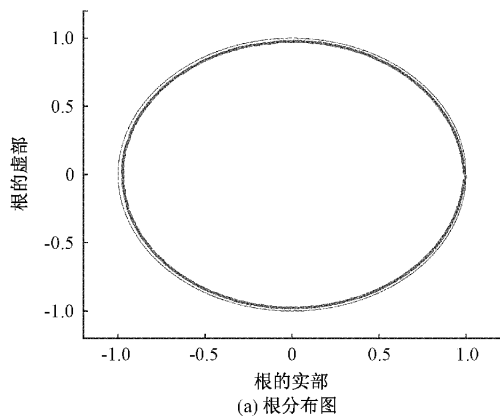


(a) 根分布图

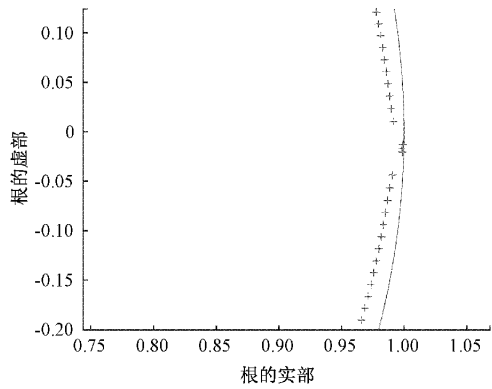


(b) 局部放大图

图 5 Root-MUSIC 算法到达时间估计根的分布



(a) 根分布图



(b) 局部放大图

图 6 SF-Root-MUSIC 算法到达时间估计根分布

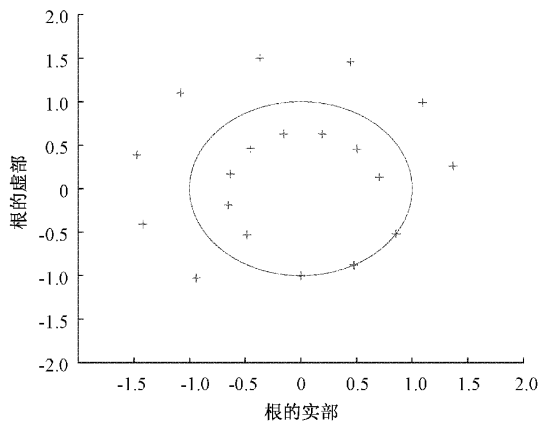


图 7 Root-MUSIC 算法波达方向估计根分布

3.3 信噪比对估计性能的影响

在相同条件下,分别采用 Root-MUSIC 算法和 SF-Root-MUSIC 算法两种算法进行 OFDM 的到达时间和波达方向联合估计。图 9 为通过 200 次 Monte Carlo 仿真实验对两种算法的到达时间估计均方根误差性能对比,图 10 为波达方向估计均方根误差性能的对比。可以看出,两种算法具有相似的估计性能,表明所提算法在保证估计精度不下降的同时,有效降低了 Root-MUSIC 算法的计算复杂度。

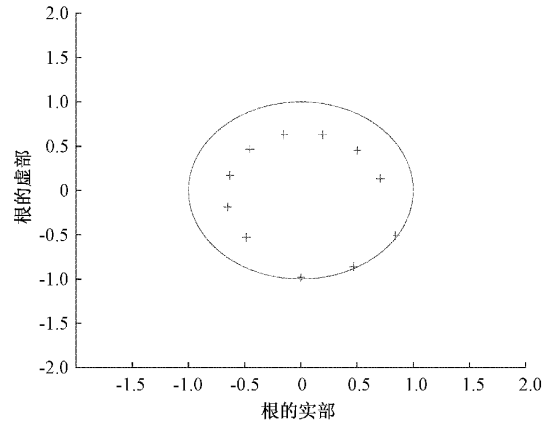


图 8 SF-Root-MUSIC 算法波达方向估计根分布

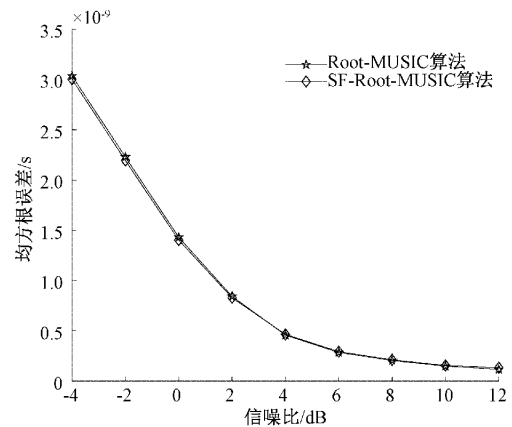


图 9 不同算法的到达时间估计均方差性能比较

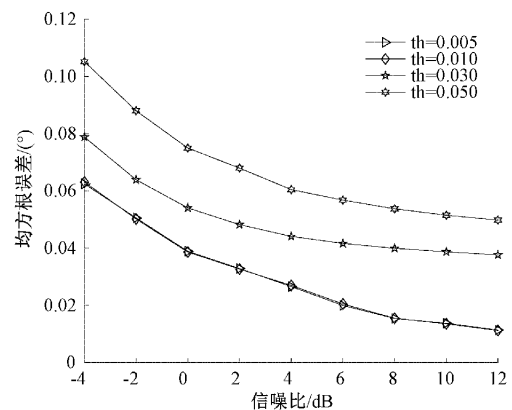


图 10 不同算法的波达方向估计均方差性能比较

3.4 SF-Root-MUSIC 算法有效性验证

在相同条件下,设置信噪比为 5 dB,对 SF-Root-MUSIC 算法进行 200 次 Monte Carlo 独立实验得到各径的到达时间和波达方向联合估计分布图。从图 11 中可以看出,所提算法可以准确完成到达时间和波达方向的参数匹配,具有良好的二维参数联合估计性能。

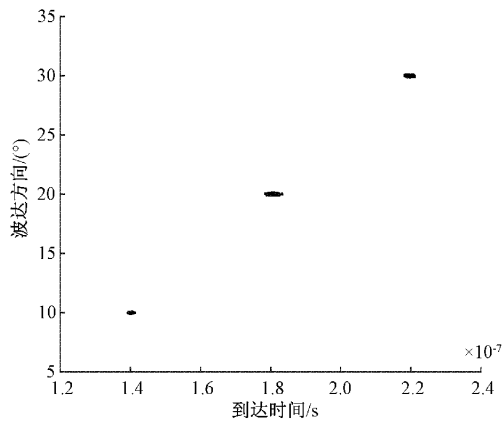


图 11 到达时间和波达方向联合估计图

4 结 论

为了解决 OFDM 系统利用 Root-MUSIC 算法进行 TOA 和 DOA 联合估计时由于多项式求根过程存在计算冗余导致算法复杂度较高、不适用于实时计算这一问题,提出一种基于谱分解的 TOA 和 DOA 联合估计算法——SF-Root-MUSIC 算法。该算法利用谱分解将到达时间估计和 DOA 估计时多项式求根过程中的 $2(N-1)$ 阶多项式和 $2(M-1)$ 阶多项式减少到 $(N-1)$ 阶和 $(M-1)$ 阶,只需计算 $(N-1)$ 个和 $(M-1)$ 个单位圆内或单位圆上的根,从而降低了算法的计算复杂度。仿真结果表明,SF-Root-MUSIC 算法与 Root-MUSIC 算法相比,到达时间和波达方向估计精度相当,且复杂度降低,具有一定的实际应用价值。

参考文献

- [1] ZHANG P, BA B, CUI W J. High-resolution time of arrival estimation with small samples considering time-varying channel fading coefficient correlation in OFDM[J]. IEEE Access, 2019, 7, 19579-19589, DOI:10.1109/ACCESS.2019.2894506.
- [2] 张黎明. 毫米波 5G NR 信号 OFDM 技术研究与实现[J]. 电子测量技术, 2020, 43(22):146-149.
- [3] BAI J H, WEI G H, WANG S Q, et al. Efficient direct localization of OFDM emitters in multipath environment with mobile receivers [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2022, 71(1): 545-556.
- [4] YUAN J W, LI X H, YANG X, et al. Phase-noise compensation based on artificial neural network optimization for OFDM ranging systems [J]. IEEE Communications Letters, 2022, 22(11): 2294-2297.
- [5] 王仲杰. 飞行试验遥测系统中相位噪声纠正算法[J]. 中国测试, 2017, 43(6):1-6.
- [6] LU Y, CAO J M, LIN K Q, et al. A novel positioning-communication integrated signal in wireless communication systems [J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2019, 8(5): 1353-1356.
- [7] 韩翔,周钦山,王峰. 5G NR 下行链路信号同步算法研究[J]. 国外电子测量技术, 2021, 40(2):83-87.
- [8] 何怡刚,隋永波, FARHAN A, 等. 自适应 OFDM 系统的时域信道预测研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2021, 35(5):100-110.
- [9] GABER A, OMAR A. Utilization of multiple-antenna multicarrier systems and NLOS mitigation for accurate wireless indoor positioning [J]. IEEE Transactions Wireless Communication, 2016, 15(10): 6570-6584.
- [10] 李烁,马云飞,谢谨. 基于 Wi-Fi 入射信号到达角超分辨率估计的无源车速测量[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(10):268-276.
- [11] LI Y, YU J, HE L Y. TOA and DOA estimation for IR-UWB signals: An efficient algorithm by improved Root-MUSIC[J]. Wireless Communications & Mobile Computing, 2021, DOI: 10.1155/2021/9960273.
- [12] 窦慧晶,孙璐,谢金鑫. 基于阵列扩展的改进 PM 的二维 DOA 估计[J]. 北京工业大学学报, 2019, 45(9):831-837.
- [13] DAN Z S, LIAN B W, XU H W. Research on LTE positioning algorithm under multipath environment [C]. 2018 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC), 2018, 1-6, DOI:10.1109/ICSPCC.2018.8567820.
- [14] 金涛,刘对. 基于改进形态滤波与 TLS-ESPRIT 算法的电力系统低频振荡模态辨识[J]. 中国测试, 2017, 43(1):89-95.
- [15] ABDO G, ABBAS O. A study of wireless indoor positioning based on joint TDOA and DOA estimation using 2D matrix pencil algorithms and IEEE 802.11ac[C]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(5): 2440-2454.
- [16] ZHOU B, JING C Q, KIM Y. Joint TOA/AOA positioning scheme with IP-OFDM systems [C]. Wireless Personal Communications, 2014, 75(1): 261-271.
- [17] 巴斌,刘国春,李韬,等. 基于哈达玛积扩展子空间的到达时间和波达方向联合估计[J]. 物理学报, 2015, 64(7): 384-392.
- [18] LI H W, JIANG C Q, CHEN S, et al. Joint delay and angle estimation algorithm with low-complexity in multipath environments[C]. 2018 IEEE 3rd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), 2018, 2505-2509, DOI: 10.1109/IAEAC.2018.8577259.
- [19] LI H W, ZHENG N E, SONG X Y, et al. Fast

- estimation method of space-time two-dimensional positioning parameters based on hadamard product[J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2018 (1): 7306902.1-7306902.9, DOI: 10.1155/2018/7306902.
- [20] LI X Z, CUI W J, XU H Y, et al. A novel method for DOA and time delay joint estimation in multipath OFDM environment [J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2020, 2020 (3): 1-11, DOI: 10.1155/2020/3952175.
- [21] SAYED A H, KAILATH T. A survey of spectral factorization methods[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2001,8(8):467-496.

作者简介

李铭, 硕士研究生, 主要研究方向为无线通信。

E-mail: liming114924@163.com

侯艳丽, 副教授, 通信作者, 主要研究方向为无线通信。

E-mail: houyanli26@126.com

苏佳, 副教授, 主要研究方向为无线通信。

E-mail: sujia@hebust.edu.cn