

基于 $L-p$ 范数的二维最大间距准则及其在人脸识别中的应用*

张仕霞 金 聪

(华中师范大学计算机学院 武汉 430079)

摘要: 在二维图像投影降维时,经常使用 $L-2$ 范数和 $L-1$ 范数构建降维模型,在一定程度上实现了降维的目标。但是这些方法只适用于单一范数,有很大局限。本文提出了一个新的方法,降维目标函数采用 $L-p$ 范数($1 \leq p \leq 2$),这种方法可以构建更加一般化的降维模型,适用于所有同类模型的求解, $p=1$ 和 $p=2$ 可以视作这个模型的特殊情况。所提的方法比单一的 $L1$ 或 $L2$ 范数具有更强的灵活性,能够适应不同问题。本文采用目标函数为 $L-p$ 范数的二维最大间距准则,同时定义了类内离散因子对原始数据降维。通过在 ORL 和 Yale 以及加噪数据库上的实验表明本文方法具有更好的鲁棒性和高效性。

关键词: 二维最大间距准则;特征提取;人脸识别; $L-p$ 范数

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4050

L-p norm based on two-dimensional maximum margin criterion with application on face recognition

Zhang Shixia Jin Cong

(School of Computer, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: Among the dimensionality reduction methods of 2D image, they often use $L-2$ norm and $L-1$ norm to construct the dimension reduction model, to a some extent, they realize the goal of dimension reduction. However, these methods only apply to the single norm, which is very limited. In this paper, we propose a new method, which uses $L-p$ norm ($1 \leq p \leq 2$) instead of a single one. This method can construct a more generalized dimension reduction model and is suitable for all similar models. $p=1$ and $p=2$ can be regarded as a special case of this model. The proposed method is more flexible than a $L1$ or $L2$ norm and can adapt to different problems. In this paper, the objective function adopts the $L-p$ norm of the two-dimensional maximum margin criterion, and the intra-class discrete factor is defined to reduce the original data. The experiments on ORL and Yale and noise reduction databases show better robustness and efficiency.

Keywords: two-dimensional maximum margin criterion (MMC); feature extraction; face recognition; $L-p$ norm

0 引言

在统计模式识别和图像处理领域,高维数据是限制多种模式识别技术的主要因素,在文献[1-2]中提出了“维数灾难”以及测度的“集中现象”等问题。为了克服这些问题使原始数据的表示以及分类更加稳健,对高维数据进行降维^[3-4]就显得非常重要,目前在文献[5-6]中降维已经被广泛应用。降维则是对原始数据进行投影变换,利用变换矩阵得到新的数据信息,即原始数据在低维数据空间的表示。

经典算法是将数据以向量的形式输入,将二维图像向量化,导致维数增加。如 112×92 的人脸图像向量化后为 10 304 维,不仅提高了计算的复杂度还会丢失部分重要信息。针对此问题提出了基于二维^[7]图像矩阵的方法,文献[8-10]中均使用了二维的方法直接处理图像。该方法将原始数据信息以二维矩阵直接输入,具有直观性更强、计算量更小、散布矩阵一般情况下可逆以及分类准确率更高等优点。

经典的二维降维方法都是基于 $L-2$ 范数的,求解较简

单且容易实现,在部分实验中取得了较好的实验效果。同时在最新的文献[11]中也出现了基于L-1范数的降维方法,文献[12-13]中均使用了L-1范数并取得了较好的实验效果。L-1和L-2范数被广泛应用在降维模型中,但是它们都仅仅使用单一范数,不同的范数适用的情况不同,降维效果很大程度上与数据的具体情况有关。比如,在某些数据集取得很好效果的范数,在别的数据集上不一定能达到同样令人满意的效果。本文对二维降维中最大间距准则的目标函数采用L-p($1 \leq p \leq 2$)范数,其中 $p=1$ 和 $p=2$ 均为特殊情况,这种方法可以根据需要自适应选择不同的范数,范数的使用更加灵活,不必考虑数据集的具体情况。

经典的最大间距准则算法仅仅使样本数据在子空间中的类间散度矩阵与类内散度矩阵之差最大,并没有考虑类间和类内的平衡。文献[14-15]针对此问题提出了权重的算法,本文采用了类似的思想,定义了类内离散因子。

1 基于L-p范数的二维最大间距准则

二维最大间距准则(2DMMC)是基于图像投影理论的一种算法,其目的是寻找一个最优的投影矩阵。将样本矩阵映射到低维矩阵空间后,使得同类样本更加紧凑,不同类样本尽可能疏远,使得不同类别的图像更容易被区分。

1.1 问题公式化

设有 n 个训练数据,分别来自于 c 个类别,其中 $\mathbf{A}_j^i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 表示第 i 类的第 j 个训练矩阵,其中 $i=1,2,\dots,c$;

$j=1,2,\dots,n_i$,并且满足 $\sum_{i=1}^c n_i = n$ 。

二维最大间距准则^[10]的目标函数为:

$$\max J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \|\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{A}})^T\|_2 - \alpha \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} \|\mathbf{w}^T(\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_i)^T\|_2 \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w} = 1 \quad (1)$$

可以看出经典最大间距准则方法的目标函数是基于L-2范数的。

基于L-1范数的二维最大间距准则^[16]的目标函数为:

$$\max J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \|\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}\|_1 - \alpha \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} \|y_j^i - \bar{y}_i\|_1 \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w} = 1 \quad (2)$$

本文提出了基于L-p($1 \leq p \leq 2$)范数的二维最大间距准则,当 $p=1$ 和 $p=2$ 时为上述两种特殊情况。因此本文算法是以上两种方法的推广即一般形式,该模型增强了原有模型的灵活性以便适应不同问题。

该方法的目标函数及约束条件为:

$$g(\mathbf{w}(t)) = \frac{\sum_{i=1}^c n_i \left(\sum_{k=1}^m s_i^k(t) (\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)}) \right) - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^m r_j^{i(k)}(t) (a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)}) \right)}{J(\mathbf{w}(t))} \quad (9)$$

每次迭代过程中,循环交替式(8)和(9)求解最优投影方向,若目标函数 $J(\mathbf{w}(t+1))$ 停止增长,则终止循环。否

$$\max J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \|\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}\|_p - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \|y_j^i - \bar{y}_i\|_p \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (3)$$

其中 $y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}$ 代入化简得:

$$\max J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \|\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{A}})^T\|_p - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \|\mathbf{w}^T(\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_i)^T\|_p \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (4)$$

其中 τ_i 与 α 类似,为正则化常数,用来平衡类间和类内散布矩阵,参数 τ_i 表示第 i 类的类内离散因子,定义为: $\tau_i = d_{\max}^i / d_{\min}^i$,其中 d_{\max}^i 和 d_{\min}^i 分别表示第 i 类的所有样本到类均值的最大和最小间距,其中 n_i 表示第 i 类的样本个数。

记 $\mathbf{A} = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}]^T$, $a^{(k)}$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的第 k 行的列向量形式。将矩阵范数公式代入式(4)得:

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s |w_l^T(\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)})|^p \right)^{1/p} - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s |w_l^T(a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)})|^p \right)^{1/p} \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (5)$$

由于式(5)直接求解很难得到全局最优解,利用贪心算法取 $s=1$,化解得:

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^c n_i \left(\sum_{k=1}^m |w^T(\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)})|^p \right)^{1/p} - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^m |w^T(a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)})|^p \right)^{1/p} \quad \text{s. t. } \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (6)$$

本文采用梯度迭代算法计算Lp-2DMMC的最优投影方向 \mathbf{W} 。

1.2 寻找Lp-2DMMC的单个最优投影方向

采用梯度法迭代计算Lp-2DMMC的单个最优投影方向 \mathbf{w} 。当迭代到第 t 步时:

$$J(\mathbf{w}(t)) = \sum_{i=1}^c n_i \left(\sum_{k=1}^m |w^T(t)(\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)})|^p \right)^{1/p} - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^m |w^T(t)(a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)})|^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

针对式中存在的非线性绝对值符号,分别定义两个符号函数:

$$s_i^k(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{w}^T(t)(\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)}) > 0 \\ -1, & \mathbf{w}^T(t)(\bar{a}_i^{(k)} - \bar{a}^{(k)}) \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$r_j^{i(k)}(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{w}^T(t)(a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)}) > 0 \\ -1, & \mathbf{w}^T(t)(a_j^{i(k)} - \bar{a}_i^{(k)}) \leq 0 \end{cases}$$

同时,利用 $\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \gamma g(\mathbf{w}(t))$ 取学习步长 $\gamma=0.5$,更新最优投影方向 \mathbf{w} ,其中

则继续直到找到满足条件的最优投影向量。根据文献[16]可知目标函数存在上界,在每次循环计算时目标函数

都保持非降,所以迭代过程逐渐收敛。

Lp-2DMMC 求单个最优投影方向的算法:

输入:原始图像数据矩阵为 $\mathbf{A}_j^i \in \mathbf{R}^{m \times s}$, 其中 $i = 1, 2,$

$\dots, c, j = 1, 2, \dots, n_i$, 且 $\sum_{i=1}^c n_i = n$ 。

输出:单个最优投影向量。

过程:

1) 利用训练样本求得总平均值 $\bar{\mathbf{A}}$ 、类平均值 $\bar{\mathbf{A}}_i$ 、类内离散因子 τ_i , 以及每个类别的所有样本到类均值的最大间距 d_{\max} 及最小间距 d_{\min} ;

2) 初始化: 设迭代次数 $t = 0$, 并生成一个随机的 p 维非零向量, 将向量归一化得 $\mathbf{w}(0)$ 。通过符号函数式(8)求得 s_i^t, r_j^t 的值;

3) 利用 $\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \gamma g(\mathbf{w}(t))$ ($0 < \gamma < 1$) 更新最优投影方向 \mathbf{w} , 得到新的 $\mathbf{w}(t+1)$;

4) 判段目标函数式(7)是否收敛。若停止增长, 则终止循环。否则归一化后并执行 $t = t + 1$ 返回第3步;

5) 最后将 $\mathbf{w}(t+1)$ 归一化后即需要的单个最优投影向量。

通过上面的迭代算法得到一个最优投影向量。但是在实际应用中, 如果只有单个投影向量是远远不够的, 下面是将求解单个最优投影方向扩展到任意多个投影方向的具体过程。

1.3 Lp-2DMMC 多个最优投影方向的扩展

将求解单个方向扩展到多个投影方向。设 \mathbf{W}_1 是已经得到的第1个最优投影方向, 在 \mathbf{W}_1 的正交补空间中寻求第2个最优投影方向 \mathbf{W}_2 , 此时的目标函数为:

$$J(\mathbf{w}(2)) = \sum_{i=1}^c n_i \|(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{w}(2)\|_p - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \|(\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_i)\mathbf{w}(2)\|_p \quad (10)$$

由于最优投影方向 \mathbf{w}_2 在 \mathbf{w}_1 的正交补空间, 即最大化目标函数式在 \mathbf{w}_1 的正交补空间中求解, \mathbf{w}_1 的正交补空间可表示为 $\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T$, 其中 \mathbf{I}_s 表示 s 维的单位矩阵, 故存在向量 $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbf{R}^s$, 使得 $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T)\boldsymbol{\beta}_1$, 将 \mathbf{w}_2 代入目标函数得:

$$J(\mathbf{w}(2)) = \sum_{i=1}^c n_i \|(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{A}})(\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T)\boldsymbol{\beta}_1\|_p - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \|(\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_i)(\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T)\boldsymbol{\beta}_1\|_p \quad (11)$$

新样本数据 $\mathbf{A}_j^{i(2)} = (\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T)\mathbf{A}_j^i$, 其中 $\mathbf{A}_j^{i(2)}$ 为原始样本数据 \mathbf{A}_j^i 在 \mathbf{w}_1 的正交补空间的表示。新数据矩阵 $\mathbf{A}_j^{i(2)}$ 的类平均值和总平均值可以分别表示为 $\bar{\mathbf{A}}_i^{(2)}$ 和 $\bar{\mathbf{A}}^{(2)}$, 化简得到新的目标函数为:

$$J(\mathbf{w}(2)) = \sum_{i=1}^c n_i \|(\bar{\mathbf{A}}_i^{(2)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)})\boldsymbol{\beta}_1\|_p - \sum_{i=1}^c \tau_i \sum_{j=1}^{n_i} \|(\mathbf{A}_j^{i(2)} - \bar{\mathbf{A}}_i^{(2)})\boldsymbol{\beta}_1\|_p \quad (12)$$

观察目标函数式(10)和(12), 除了原始数据矩阵 \mathbf{A}_j^i 被

$\mathbf{A}_j^{i(2)}$ 替代外, 其形式类似, 式中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可以通过求单个最优投影方向的方法求解。求出 $\boldsymbol{\beta}_1$ 之后, 再利用 $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T)\boldsymbol{\beta}_1$ 得到投影方向, 归一化后即第二个最优投影方向。

通过循环可以得到多个最优投影向量。设已求得 l 个最优投影方向, 第 $l+1$ 个投影方向 \mathbf{w}_{l+1} 可在正交向量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l$ 的正交补空间求得。原始数据在新的投影空间的数据为:

$$\mathbf{A}_j^{i(l+1)} = \mathbf{A}_j^{i(l)}(\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^T) \quad (13)$$

在新的投影空间利用求单个最优投影向量的方法求得 $\boldsymbol{\beta}_l$, 代入 $\mathbf{w}_{l+1} = (\mathbf{I}_s - \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^T)\boldsymbol{\beta}_l$ 可以得到 \mathbf{w}_{l+1} , 归一化后即第 $l+1$ 个最优投影向量, 代入 $\mathbf{w}_{l+1} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_{l+1}]$ 得到投影矩阵。由此可以求得 $d(d < s)$ 个投影方向, 即最优投影矩阵。

Lp-2DMMC 求解多个最优投影方向的算法:

输入:原始图像数据矩阵为 $\mathbf{A}_j^i \in \mathbf{R}^{m \times s}$, 最优投影方向个数 $d(d < s)$, 学习步长 $\gamma = 0.5$ 。

输出:投影矩阵 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_d] \in \mathbf{R}^{s \times d}$ 。

过程:

1) 初始化 $l = 0, \mathbf{w}_l$ 为空;

2) 计算最优投影方向 \mathbf{w}_{l+1} ;

a) 样本数据类平均值 $\bar{\mathbf{A}}_i$ 及总平均值 $\bar{\mathbf{A}}$;

b) 初始化: 设迭代次数 $t = 0$, 并生成一个任意 s 维的非零向量 $\boldsymbol{\beta}(0)$;

c) 计算符号函数式(8);

d) 更新 $\mathbf{w}(t+1)$;

e) 判断目标函数是否收敛; 若 $J(\mathbf{w}(t+1))$ 停止增长, 则终止当前循环并求出 \mathbf{w}_{l+1} ; 否则, 令 $t = t + 1$ 返回 c);

3) 更新样本数据 \mathbf{A}_j^i ;

4) 归一化投影向量后合并可得投影矩阵;

5) 如果 $l+1 < d$, 执行 $l = l+1$ 并返回第2)步, 否则停止循环, 并输出投影矩阵 \mathbf{W} 。

通过上面的算法即可得到多个最优投影方向, 即投影矩阵。知道了投影矩阵即可将原始数据信息进行降维, 实验部分利用最近邻分类器进行分类, 验证算法的有效性。

2 实验结果及分析

为了测试本文算法的准确性和有效性以及对野值和噪声具有更好的适应性。本文选用了 ORL 和 Yale 人脸数据库以及加噪图像进行分类, 选用了不同的 p 值进行实验。

2.1 数据库描述

ORL 人脸数据库是由英国剑桥大学拍摄制成, 由年龄、性别和种族均不尽相同的 40 人作为对象, 每个对象包含 10 幅图像, 共 400 幅背景为黑色的 112×92 灰度人脸图像组成。其中人脸表情和细节均有变化, 人脸姿态深度旋转和平面旋转以及尺寸均有变化。如图 1 所示。



图1 ORL人脸图形库中一个人的10张图

Yale人脸数据库包含了15个人、每人11张照片的165幅灰度人脸图像。这些照片在不同的表情、背景和光照等条件下拍摄。如图2所示。



图2 Yale人脸图形库中一个人的11张图

2.2 原始数据库上的实验

为了验证不同训练集对识别率的影响,在ORL和Yale数据集上选择每类的前 $k(k=2,3,4,5,6,7)$ 张图像作为训练样本,余下的作为测试样本。实验部分取降维维数为2,不同 p 值和2DMMC算法的分类精度如表1所示。

图3~4表示不同 p 值和2DMMC算法在不同训练样本上的结果,其中图3是在ORL数据集上的实验结果,图4是在Yale数据集上的实验结果:

由实验结果分析可得随着训练集的样本数增加分类精度逐渐提高。在ORL数据集上,当训练样本分别为2、3、4的时候,本文算法的最高分类精度(%)分别为88.75、

表1 不同的训练样本在ORL和Yale数据集上的分类精度

算法精度/% 训练样本	ORL数据集						Yale数据集					
	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7
2DMMC-Lp($p=1$)	85.31	87.50	86.67	90.50	93.75	95.83	75.58	75.00	78.10	77.78	88.00	96.67
2DMMC-Lp($p=1.1$)	87.19	88.57	92.08	92.50	96.25	96.67	77.78	76.67	79.05	78.89	88.00	96.67
2DMMC-Lp($p=1.2$)	88.75	88.21	90.00	91.50	94.38	96.67	78.52	77.50	81.90	84.44	86.67	98.33
2DMMC-Lp($p=1.3$)	87.19	89.28	85.00	88.50	92.50	95.83	79.26	77.50	82.86	81.11	92.00	96.67
2DMMC-Lp($p=1.4$)	86.25	86.07	91.60	93.00	93.13	93.33	78.52	76.67	80.95	80.00	89.33	98.33
2DMMC-Lp($p=1.5$)	86.56	90.00	89.17	92.00	96.88	95.83	77.04	75.00	78.10	81.11	89.33	95.00
2DMMC-Lp($p=1.6$)	87.81	88.21	92.08	92.50	96.25	96.67	76.30	76.67	82.86	81.11	86.67	98.33
2DMMC-Lp($p=1.7$)	88.75	89.64	91.25	91.50	96.25	97.50	77.04	76.67	84.76	76.67	85.33	96.67
2DMMC-Lp($p=1.8$)	87.81	81.07	91.25	92.50	95.63	95.83	77.04	77.50	83.81	83.33	88.00	95.00
2DMMC-Lp($p=1.9$)	88.13	89.29	91.25	93.25	96.25	95.00	77.78	76.67	84.76	77.78	92.00	96.67
2DMMC-Lp($p=2$)	86.25	83.57	85.00	90.00	94.38	95.83	74.07	73.33	80.00	78.89	88.00	95.00
2DMMC	80.63	80.00	82.08	85.50	91.88	93.33	70.37	71.67	77.14	77.78	85.33	93.33

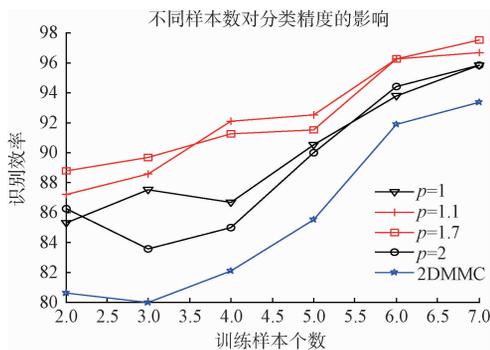


图3 ORL数据集上的分类精度

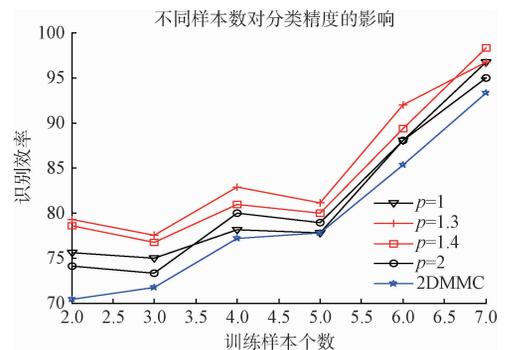


图4 Yale数据集上的分类精度

90、92.08,最低分类精度为85.31、81.07、85,而2DMMC算法的分类精度分别为80.63、80、82.08,本文算法的最高分类精度比2DMMC算法分别高了8.12、10、10,即使是本文算法的最低分类精度也比2DMMC算法的分类精度要高,分别高了4.68、1.07、2.92。在训练样本为7时所有算法均取得了最高分类精度,本文算法取得的最高分类精度为97.5,而经典算法的精度仅达到了93.33,本文算法的最

高精度比经典算法高了4.17。在经典的Yale数据集上,通过数据分析同样可以知道,本文方法整体比2DMMC算法的分类精度高。

2.3 加噪声实验

为了验证算法的鲁棒性,在原始图像数据集上加上不同噪声。如图5和图6分别是ORL数据集中和Yale数据集中对同一张图片加上不同噪声后的图像。其中前5张

图像为加入不同密度的椒盐噪声后的图像,后 5 张图像为加入不同方差高斯白噪声后的图像。



图 5 图像加入噪声示例



图 6 图像加入噪声示例

表 2 在 ORL 数据集上的加噪实验分类精度

算法精度/% 噪声	椒盐噪声(密度)							高斯白噪声(方差)						
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
2DMMC-Lp($p=1$)	86.25	87.08	86.25	79.58	72.92	47.5	28.75	87.08	89.17	84.17	85.42	84.17	85.42	87.50
2DMMC-Lp($p=1.1$)	90.83	88.33	87.92	82.08	75.83	57.50	37.5	91.67	85.42	89.58	89.17	89.17	89.58	88.75
2DMMC-Lp($p=1.2$)	88.33	89.17	85.42	83.33	51.67	64.17	19.92	89.58	90.42	85.42	89.17	89.58	90.00	92.08
2DMMC-Lp($p=1.3$)	91.25	84.58	89.58	86.67	73.33	52.50	19.92	87.92	89.17	91.25	86.67	87.92	85.83	91.67
2DMMC-Lp($p=1.4$)	89.17	86.67	90.83	87.92	67.08	60.00	24.17	88.75	91.25	90.00	92.08	90.42	90.00	88.75
2DMMC-Lp($p=1.5$)	89.17	88.75	88.33	82.08	78.33	51.67	35.83	85.42	87.50	91.25	87.50	90.42	87.92	91.67
2DMMC-Lp($p=1.6$)	90.00	90.83	90.42	88.75	69.17	61.67	11.25	88.33	92.08	84.58	90.83	87.92	87.08	89.17
2DMMC-Lp($p=1.7$)	88.33	90.42	90.42	85.42	67.92	38.33	33.75	85.00	89.17	89.17	89.17	90.42	82.92	91.67
2DMMC-Lp($p=1.8$)	91.67	90.00	86.25	85.42	78.75	59.58	16.25	87.08	90.42	87.50	89.17	88.33	88.75	90.42
2DMMC-Lp($p=1.9$)	91.25	90.42	85.00	85.00	68.33	47.50	22.08	91.25	90.42	88.33	89.50	90.83	87.05	90.00
2DMMC-Lp($p=2$)	85.42	86.07	85.00	78.75	63.75	44.58	19.92	87.50	87.50	83.33	88.33	84.58	84.17	88.75
2DMMC	83.75	84.17	70.00	50.83	38.33	16.25	8.75	82.92	83.75	82.08	81.25	76.67	71.25	62.08

图 7~8 是实验结果图。图 7 是在 ORL 数据集加上不同密度的椒盐噪声后的实验结果,图 8 所示为在 ORL 数据集加上不同方差的高斯白噪声后的实验结果。

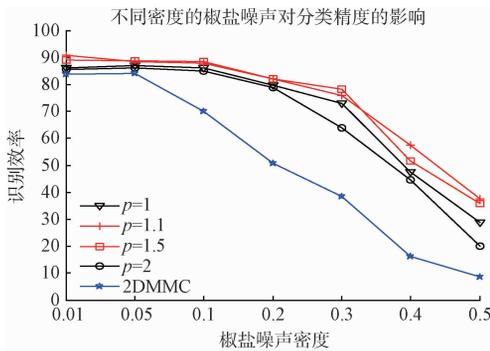


图 7 不同椒盐噪声的分类结果

由实验结果分析可得,在原始数据集加上不同密度的椒盐噪声时,整体上看噪声越大分类精度越低,本文方法比 2DMMC 算法有很大的优越性,本文算法的抗噪能力整体上比 2DMMC 好。在 p 取 1.1 时,本文算法取得相对最好的分类精度,随着噪声从 0.01 增加到 0.5,算法的精度(%)分别为 90.83、88.33、87.92、82.08、75.83、57.5、

下面是在 ORL 数据集和 Yale 数据集上加上不同噪声的具体实验及分析。

2.3.1 在 ORL 数据集上的加噪实验

本节是 ORL 数据集上的加噪实验,分别对图像加上不同密度的椒盐噪声和不同方差的高斯白噪声。实验取每类样本的前 4 张图像作为训练样本,余下作为测试样本。取特征维数为 2,对不同 p 值和 2DMMC 算法的分类精度进行比较,实验结果如表 2 所示。

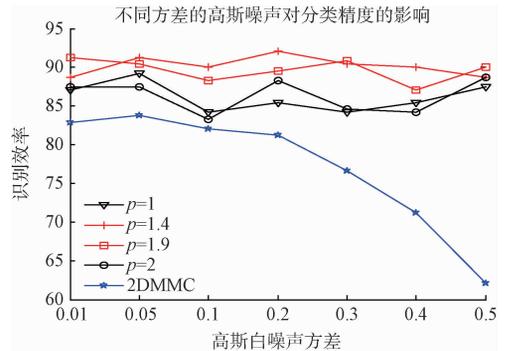


图 8 不同高斯噪声的分类结果

37.5。而 2DMMC 的精度分别是 83.75、84.17、70、50.83、38.33、16.25、8.75。本文方法 $p=1.1$ 时的分类精度分别比 2DMMC 算法高 7.08、4.16、17.92、31.25、37.5、41.25、28.75。在 p 取 2 时,2DMMC-Lp 算法的分类精度相对最低,随着噪声变化,它的精度分别为 85.42、86.07、85、78.75、63.75、44.58、19.92,但是仍然比 2DMMC 算法的分类精度要高,分别高了 1.67、1.9、15、27.92、25.42、28.33、11.17。在加入高斯白噪声(按照高斯分布加入的白噪声)后,本文算法的实验结果并没有明显较大降低,然

而 2DMMC 算法的分类结果却有明显降低,从整体上看本文方法的分类精度均比 2DMMC 的分类精度高,体现了本文算法具有较好的鲁棒性。

2.3.2 在 Yale 数据集上的加噪实验

本节方法与 ORL 数据集的加噪实验类似,在 Yale 数

据集加上不同密度的椒盐噪声和不同方差的高斯白噪声。实验部分取每类样本的前 5 张图像作为训练样本,余下的作为测试样本,取特征维数为 2,对不同 p 值的算法和 2DMMC 算法进行了比较,实验结果如表 3 所示。

表 3 在 Yae 数据集上的加噪实验分类精度

算法精度/% 噪声	椒盐噪声(密度)							高斯白噪声(方差)						
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
2DMMC-Lp($p=1$)	75.56	80.00	76.67	74.44	73.33	70.00	56.67	78.89	75.56	81.11	76.67	75.56	75.56	80.00
2DMMC-Lp($p=1.1$)	76.67	83.33	84.44	77.78	77.78	81.11	77.78	76.67	83.33	88.89	80.00	83.33	76.67	82.22
2DMMC-Lp($p=1.2$)	84.44	85.56	82.22	78.89	77.78	75.56	67.78	84.44	81.11	82.22	81.11	82.22	78.89	80.00
2DMMC-Lp($p=1.3$)	78.89	84.44	83.33	77.78	73.33	73.33	58.59	88.89	84.44	83.33	78.89	81.11	82.22	81.11
2DMMC-Lp($p=1.4$)	77.78	81.11	8.000	81.11	77.78	73.33	48.89	83.33	84.44	77.78	80.00	77.78	77.78	80.00
2DMMC-Lp($p=1.5$)	82.22	82.22	83.33	85.56	80.00	74.44	63.33	80.00	78.89	82.22	78.89	82.22	83.33	78.89
2DMMC-Lp($p=1.6$)	80.00	80.00	82.22	85.56	76.67	71.11	50.00	81.11	81.11	81.11	77.78	80.00	83.33	78.89
2DMMC-Lp($p=1.7$)	87.78	84.44	80.00	80.00	78.89	70.00	50.00	78.89	85.56	75.56	75.56	80.00	83.33	81.11
2DMMC-Lp($p=1.8$)	83.33	82.22	84.44	76.67	75.56	72.22	77.78	78.89	82.22	85.56	83.33	86.67	86.67	83.33
2DMMC-Lp($p=1.9$)	88.89	88.89	78.89	80.00	76.67	65.56	73.33	80.00	85.56	81.11	84.44	82.22	80.00	81.11
2DMMC-Lp($p=2$)	77.78	78.89	76.67	71.11	73.33	60.00	57.78	76.67	78.89	80.00	77.78	74.44	76.67	78.89
2DMMC	73.33	77.78	71.11	44.44	31.11	23.33	14.44	73.33	74.44	75.56	71.11	68.89	65.56	54.44

图 9~10 所示为实验结果图。图 9 表示在 Yale 数据集上加不同密度的椒盐噪声后的实验结果,图 10 表示在 Yale 数据集上加不同方差的高斯噪声后的实验结果。

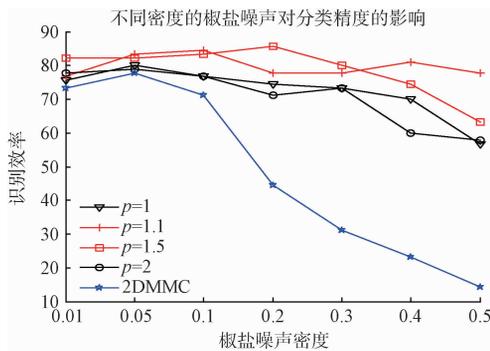


图 9 不同椒盐噪声的分类结果

由实验结果分析可得,在 Yale 数据集上加不同密度的椒盐噪声时,整体上看噪声越大分类精度越低。从结果可以得到本文方法比 2DMMC 算法的分类精度明显偏高,每一种不同噪声对应的最高分类精度均在本文的方法上取得,当噪声较大时效果较为明显。当椒盐噪声的密度分别为 0.1、0.2 时,本文算法的最高分类精度分别为 84.44、85.56,最低分类精度分别为 76.67、71.11,而 2DMMC 算法的分类精度分别为 71.11、44.44,本文算法在加上密度分别为 0.1、0.2 的椒盐噪声后的最高分类精度比 2DMMC 算法的分类精度分别高 13.33、41.12,即使是最低分类精

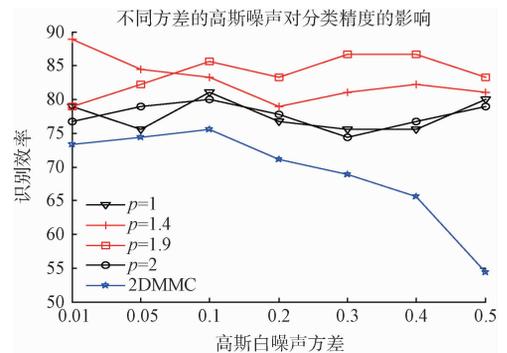


图 10 不同高斯噪声的分类结果

度也比 2DMMC 算法的精度要高许多,分别高了 5.56、26.67。由上面的数据可以看出当噪声大于 0.1 后,本文算法的分类精度虽有下降但并不明显,而 2DMMC 算法的分类精度急剧下降。对于加入不同方差的高斯白噪声(按照高斯分布加入的白噪声)后本文算法的分类精度并没有完全降低,本文算法在个别 p 值上的实验结果还略有提高,但 2DMMC 算法的结果明显降低。整体上看本文算法的分类精度均高于 2DMMC 的分类精度,体现了本文算法比原有算法具有更强的适应性和鲁棒性。

3 结 论

本文提出的一种目标函数采用 L-p 范数($1 \leq p \leq 2$)的方法,这种方法构建了一个更加一般化的降维模型,适用

于所有同类模型的求解, $p=1$ 和 $p=2$ 可以视作这个模型的特殊情况,该方法提高了模型的灵活性以便适应不同问题。本文采用了目标函数为L- p 范数的二维最大间距准则算法,并将此方法应用在人脸识别上,实验结果显示本文算法具有更好的鲁棒性和高效性。

参考文献

- [1] HAR-PELED S, INDYK P, MOTWANI R. Approximate nearest neighbor: towards removing the curse of dimensionality[J]. *Theory of Computing*, 2012, 52(11):604-613.
- [2] ZHANG H, ZHANG Y, HUANG T S. Pose-robust face recognition via sparse representation[J]. *Pattern Recognition*, 2013, 46(5):1511-1521.
- [3] 韩超,方露,章盛.一种优化的图像配准算法[J]. *电子测量与仪器学报*, 2017, 31(2):178-184.
- [4] SHI J, JIANG Z, FENG H. Adaptive graph embedding discriminant projections [J]. *Neural Processing Letters*, 2014, 40(3):211-226.
- [5] 孙东辉,鞠秀亮,冯登超,等.基于FAST检测器和SURF描述子的聚合图像人脸识别[J]. *国外电子测量技术*, 2016, 35(1):94-98.
- [6] 张朝龙,何怡刚,袁莉芬,等.基于核熵成分分析的模拟电路早期故障诊断方法[J]. *仪器仪表学报*, 2015, 36(3):675-684.
- [7] ABUZNEID M, MAHMOOD A. Performance improvement for 2-D face recognition using multi-classifier and BPN [C]. *Long Island Systems, Applications and Technology Conference*, 2016:1-7.
- [8] 王磊,武敬飞,贾莉.一种基于双向模块2DLDA的人脸识别方法[J]. *电子测量与仪器学报*, 2013, 27(8):760-765.
- [9] LIU X Z, YE H W. Dual-kernel based 2D linear discriminant analysis for face recognition[J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2015, 6(5):557-562.
- [10] WAN M, LI M, YANG G, et al. Feature extraction using two-dimensional maximum embedding difference[J]. *Information Sciences*, 2014(274):55-69.
- [11] GUO S, GUO D, CHEN L, et al. A L1-regularized feature selection method for local dimension reduction on microarray data [J]. *Computational Biology & Chemistry*, 2017(67):92-101.
- [12] ZHANG D, LI X, HE J, et al. A new linear discriminant analysis algorithm based on L1-norm maximization and locality preserving projection[J]. *Pattern Analysis & Applications*, 2017:1-17.
- [13] LU G F, TANG G, ZOU J. Sparse L1-norm-based maximum margin criterion [J]. *Journal of Visual Communication & Image Representation*, 2016, 38(C):11-17.
- [14] LU G F, WANG Y, ZOU J. Graph maximum margin criterion for face recognition[J]. *Neural Processing Letters*, 2016, 44(2):1-19.
- [15] ZHAO Z, ZHONG P, ZHAO Y. Learning SVM with weighted maximum margin criterion for classification of imbalanced data[J]. *Mathematical & computer modelling*, 2011, 54(3-4):1093-1099.
- [16] 陈道然.基于L-1范数的二维最大间距准则研究[D].合肥:安徽大学,2016:45-51.

作者简介

张仕霞,1993年出生,硕士研究生,主要研究方向为数字图像处理。

金聪,1960年出生,教授,主要研究方向为数字图像处理、图像水印、图像语义等。

E-mail:jinc26@aliyun.com