

# 网络控制系统的事件触发与量化控制协同设计

吴杰 付敬奇

(上海大学机电工程与自动化学院 上海 200072)

**摘要:** 针对信道带宽受限的无线网络控制系统(NCSs),提出了包含事件触发机制、信号量化和状态反馈  $L_2$  控制的协同设计方法。首先,针对无线网络时变延时,提出一种事件触发机制,并建立了线性系统的量化控制数学模型。其次,基于该模型,并利用李亚普若夫泛函和线性矩阵不等式方法,证明了系统时滞独立的  $L_2$  量化控制的稳定性,并给出了求解事件触发器参数和  $L_2$  量化控制的协同设计方法。最后,通过仿真验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 事件触发;李亚普若夫函数;  $L_2$  量化控制;协同设计

**中图分类号:** TN91    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** 510.8010

## Co-design of event-triggered scheme and quantization control in networked control system

Wu Jie Fu Jingqi

(School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** In view of the limited channel bandwidth of wireless network control systems (NCSs), a co-design method of event-triggered scheme, signal quantization and state feedback  $L_2$  control are proposed. Initially, in consideration of wireless network time-varying delay, an event-triggered communication scheme is put forward, and the mathematical model of quantization control for linear systems is established. Furthermore, based on this model and by applying a new Lyapunov function and linear matrix inequality method, criterion for the delay-dependent  $L_2$  quantization stabilization and criterion for the co-design of both the state feedback gain and the trigger parameters are derived. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by simulation.

**Keywords:** event-triggered scheme; Lyapunov function;  $L_2$  stabilization criterion; co-design

## 1 引言

网络控制系统(NCSs)中的无线传感器网络具有维护成本低,可靠性高,布线少等优点,使其在控制领域得到了广泛应用与深入研究,如文献[1]构建了基于无线传感网络的PDR系统,通过RSSI定位为其提供绝对定位信息。文献[2]针对无线传感网络的节点定位问题,提出了一种移动机器人辅助下,融入高斯混合容积卡尔曼滤波优化的定位方法。文献[3]设计了基于ZigBee技术的低功耗智能气象传感器,通过构建无线传感网络,实现了一定区域内大量采集节点和监控。文献[4]提出了基于WSN野外分布式监测系统研究,该系统能适应高寒、高海拔地区不同环境参量的监控,推动冻土区交通发展具有实际意义。文献[5]研究了一种基于集成处理器,融合无线传感网络的野外观测站设计。由于共享的是带宽有限的数字通信无线网络,它的介入同样会带来诸如传输时滞,数据包丢失,乱序等问题。

因此,有必要设计有效的方法来传送状态信息,降低网络带宽。由于信号量化能减少网络数据传输量,因此在NCSs中得到了广泛的研究<sup>[6-9]</sup>。文献[6]研究了具有单个量化器的网络化控制系统。文献[7]研究了一类具有非线性干扰的线性系统的量化反馈问题,通过改造水平-中心型量化器,设计了合理的量化策略,并提出了保证系统输入-状态稳定的充分条件。文献[8]研究了带有状态量化的连续时间系统的网络  $H_\infty$  控制问题。文献[9]提出了一种在线更新量化器参数的控制策略,并使系统具有  $H_\infty$  性能指标。

另一种减少网络资源的有效方法是事件触发机制。文献[10-12]针对NCSs中状态不完全可测情况下,研究了基于事件触发的输出反馈控制问题。文献[13]针对一类连续时间非线性系统,基于系统状态和最优预测状态间的误差,提出了保证系统有界稳定的事件触发模型预测控制算法。该算法通过降低优化问题的求解,频率节约了计算资源。文献[14]针对连续非线性系统,运用ISS(input-to-state-

stability)技术,提出了一种事件触发机制,从而完成实时调度控制任务,提高网络服务质量。文献[15]提出一种自触发机制来确保网络反馈控制系统的有限增益  $L_2$  稳定。文献[16]针对一类具有随机执行器故障的网络化 T-S 模糊系统,提出一种有效减少数据传输量的事件触发机制。

然而,目前具有时滞的 NCSs 中关于事件触发机制、信号量化和状态反馈  $L_2$  控制的协同设计的研究仍较少。为此,针对无线网络带宽有限问题,本文提出一种事件触发机制和信号量化方法,研究了时滞 NCSs 的  $L_2$  渐近稳定性及事件触发机制和  $L_2$  量化控制的协同设计方法。首先,考虑事件触发器到零阶保持器间的无线网络时滞,提出一种事件触发机制和信号量化方法,构建了统一的线性系统数学模型。

## 2 事件触发、信号量化和 NCSs 建模

为了降低无线网络的负载,具有事件触发机制,时变时滞及控制输入和控制输出信号量化的 NCSs 结构如图 1 所示。

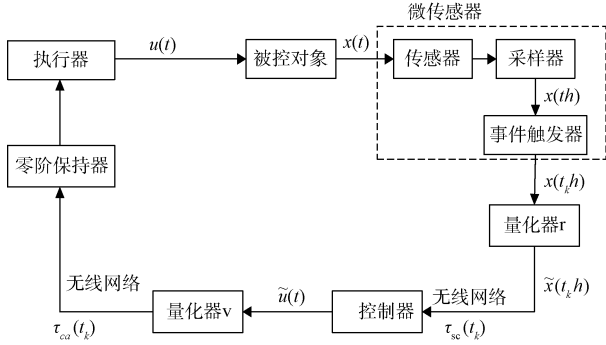


图 1 基于事件触发机制的量化时滞 NCSs 的结构

考虑线性系统模型如式(1)所示。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w\omega(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x(t) \in R^n$  是状态向量,  $u(t) \in R^m$  是控制输入向量,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  是扰动输入向量;  $A$ 、 $B$  和  $B_w$  是恒定具有适当维数的矩阵; 系统(1)的初始条件是  $x(t_0) = x_0$ 。目的在于设计一个线性的状态反馈控制器,  $u(t) = Kx(t)$ , 其中  $K$  是状态反馈控制增益矩阵, 来满足所需的  $L_2$  性能指标。

描述 1 被控系统的所有状态变量都是可测的<sup>[8,17]</sup>。假设传感器和采样器都是时间触发。量化器、控制器和零阶保持器都是事件触发。

描述 2 无线网络中的信号传输都是单包方式, 没有考虑数据丢包, 计算延时可以被忽略<sup>[18]</sup>。

如图 1 中描述, 假设采样周期为  $h$ , 采样时刻为  $kh$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ 。采样数据  $x(t_kh)$  被直接传送到量化器上,  $\tilde{x}(t_kh)$  是  $x(t_kh)$  的量化测量信号,  $\tilde{u}(t)$  是控制器的输出信号,  $u(t)$  是控制输入信号。为减少网络数据传输量, 状态信号和控制信号被传送到无线网络前, 分别被采样端的量

器  $r(\cdot)$  和控制端的量化器  $v(\cdot)$  进行量化处理。采样器端的量化器  $r(\cdot)$  定义为  $r(x) = [r_1(x_1) r_2(x_2) \dots r_n(x_n)]^T$ , 其中  $r_s(x_s)$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 选为对数量化器, 定义为:

$$r_s(x_s) = \begin{cases} u_i^{(s)}, & \frac{1}{1+\delta_r}u_i^{(s)} < x_s \leq \frac{1}{1-\delta_r}u_i^{(s)}, x_s > 0 \\ 0, & x_s = 0 \\ -r_s(x_s), & x_s < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\delta_r = (1 - \rho_r) / (1 + \rho_r)$  ( $0 < \rho_r < 1$ ),  $\rho_r$  表示量化密度, 是一个固定的常数。类似于文献[8], 量化级数集合定义为:

$$u_s = \{ \pm u_l^{(s)}, u_l^{(s)} = \rho_r^l u_0^{(s)}, l = \pm 1, \pm 2, \dots, \} \cup \{ u_0^{(s)} \} \cup \{ 0 \}, 0 < \rho_r < 1, u_0^{(s)} > 0 \quad (3)$$

定义  $\Omega_r = \text{diag} \{ \Omega_{r_1}, \Omega_{r_2}, \dots, \Omega_{r_n} \}$ , 其中  $\Omega_{r_s} \in [-\delta_r, \delta_r]$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 利用扇形有界方法,  $r(x)$  可以表示为:

$$r(x) = (I + \Omega_r)x \quad (4)$$

类似地, 控制端的量化器  $v(\cdot)$  定义为  $v(x) = [v_1(x_1) v_2(x_2) \dots v_n(x_n)]^T$ 。与  $r_s(x_s)$  类似, 其中  $v_s(x_s)$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 选用对数量化器,  $v(x)$  可以表示为:

$$v(x) = (I + \Omega_v)x \quad (5)$$

其中  $\Omega_{v_s} \in [-\delta_{v_s}, \delta_{v_s}]$ ,  $\delta_{v_s} = (1 - \rho_{v_s}) / (1 + \rho_{v_s})$  ( $0 < \rho_{v_s} < 1$ ),  $\rho_{v_s}$  是为量化密度。为简化计算, 假设  $\rho_r = \rho_r$  和  $\rho_{v_s} = \rho_v$ , 其中  $\rho_r$  和  $\rho_v$  是两个常数。则有  $\delta_r = (1 - \rho_r) / (1 + \rho_r)$ ,  $\delta_{v_s} = (1 - \rho_v) / (1 + \rho_v)$ 。

如系统模型(1)中描述, 为降低传感采样信号的传输, 为图 1 中带有时变时滞和信号量化的 NCSs 设计一种事件触发机制, 以筛选需要被传送至无线网络的有用信号。

设计的事件触发通信机制由二次条件来判定, 如式(6)所示。

$$\partial^T(t_{k+j}h)\Psi\partial(t_{k+j}h) \geq \sigma_1 x^T(t_kh)\Psi x(t_kh) \quad (6)$$

式中:  $\partial(t_{k+j}h) = x(t_{k+j}h) - x(t_kh)$ ,  $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$  是当前采样信号  $x(t_{k+j}h)$  和最近一次被成功传送的采样信号  $x(t_kh)$  之间的误差。其中  $\Psi$  是一个正定对称矩阵,  $\sigma_1$  是一个有界正实数,  $\sigma_1 \in [0, 1]$ 。

通信机制以参数  $\sigma_1$ 、 $\Psi$  和  $h$  作为特征决定了通信负载。如果采样信号  $x(t_{k+j}h)$  满足给定的事件触发条件式(6), 将会被传送到控制器。因此, 该机制一定程度上能够改善无线网络带宽的利用率和减少数据的发送次数。如果式(6)中的  $\sigma_1 = 0$ , 事件触发机制将退化为时间触发机制。

在通信机制下, 假设采样状态释放时刻  $t_0h, t_1h, t_2h, \dots, t_kh, \dots$ 。  $t_0h$  是初始释放时刻,  $\beta_k h = t_{k+1}h - t_kh$  定义为事件触发器的传输周期。考虑无线网络中的时变延时  $\tau_i$ , 忽略两个量化器的计算时间, 释放信号分别在  $t_0h + \tau_i, t_1h + \tau_i, t_2h + \tau_i, \dots, t_kh + \tau_i$  到达零阶保持器。

在图 1 中, 采样状态  $x(t_kh)$  经过量化后表示为  $\tilde{x}(t_kh)$ , 控制信号经过量化后表示为  $\tilde{u}(t)$ 。在释放时刻  $t_kh$  有:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t_k h) = r(x(t_k h)) \\ \tilde{u}(t_k h) + \tau_{sc}(t_k) = K\tilde{x}(t_k h) \\ u(t_k h + \tau_{t_i}) = v(\tilde{u}(t_k h + \tau_{t_i})) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\tau_{t_i} = \tau_{sc}(t_k) + \tau_{ca}(t_k) (k=0, 1, 2, \dots)$  表示网络延时(忽略计算延时), 该延时是事件触发器释放采样信号时刻  $t_k h$ , 到控制信号到达执行器的时间。其中  $\tau_{sc}(t_k)$  表示时间触发器 - 控制器延时,  $\tau_{ca}(t_k)$  是控制器 - 执行器延时, 且  $\tau_{t_i} (k \in Z^+)$ ,  $0 < \tau_m < \tau_{t_i} < \tau_M$ , 其中  $\tau_m$  和  $\tau_M$  分别定义时滞的下界和上界。K 是待设计的状态反馈控制增益。

结合式(2) ~ (5) 和(7) 可以推导出:

$$u(t_k h + \tau_{t_i}) = (I + \Omega_a)K(I + \Omega_r)x(t_k h) = (K + \Omega_r K + K\Omega_r + \Omega_r K\Omega_r)x(t_k h) \quad (8)$$

定义  $\Omega_K = \Omega_r K + K\Omega_r + \Omega_r K\Omega_r$ , 则状态控制器的输入信号可表示为:

$$u(t) = (K + \Omega_K)x(t_k h) \quad t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) \quad (9)$$

考虑网络中的时变延时, 信号量化和事件触发机制, 对  $t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}})$ , 在状态反馈控制器作用下, 系统模型如式(10) 所示。

分析如下时间区间:

$$t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) \quad (10)$$

定义, 因为  $t_{k+1} - t_k \geq 1$ , 所以  $t_{k+1} h - t_k h \geq h$ 。参考文献[19] 的方法, 对  $\beta h$  区间进行分析。第一种情况, 如果  $t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}} > t_k h + h + \tau_M$ , 易证明一定存在一个正整数  $d \geq 1$ , 满足:

$$t_k h + dh + \tau_M \leq t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}} \leq t_k h + (d+1)h + \tau_M \quad (11)$$

则区间  $[t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}})$  可划分成以下  $d+1$  个子区间:

$$[t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 \quad (12)$$

式中:  $\beta_1 = [t_k h + \tau_{t_i}, t_k h + h + \tau_M)$ ,  $\beta_2 = \{ \bigcup_{i=1}^{d-1} [t_k h + ih + \tau_M, t_k h + (i+1)h + \tau_M) \}$ ,  $\beta_3 = [t_k h + dh + \tau_M, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}})$ 。

定义一个分段函数:

$$\tau(t) = \begin{cases} t - t_k h, & t \in \beta_1 \\ t - t_k h - ih, & t \in \beta_2, i=1, 2, \dots, d \\ t - t_k h - dh, & t \in \beta_3 \end{cases} \quad (13)$$

从式(13) 中推导出:

$$\tau_m \leq \tau(t) \leq \tau_M + h \quad (14)$$

定义一个误差向量:

$$\partial_k(t) = \begin{cases} 0, & t \in \beta_1 \\ x(t_k h + ih) - x(t_k h), & t \in \beta_2, i=1, 2, \dots, d \\ x(t_k h + dh) - x(t_k h), & t \in \beta_3 \end{cases} \quad (15)$$

第二种情况, 如果  $t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}} \leq t_k h + h + \tau_M$ , 定义一个函数:

$$\tau(t) = t - t_k h, \quad t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) \quad (16)$$

有  $0 < \tau_m \leq \tau_{t_i} \leq \tau(t) \leq h + \tau_M$ 。此时, 定义误差向量  $\partial_k(t) = 0$ 。

结合式(14) 和(16), 得出:

$$\partial_k^T(t) \Psi \partial_k(t) \leq \sigma_1 x^T(t - \tau(t)) \Psi x(t - \tau(t)),$$

$$t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) \quad (17)$$

结合式(10)、(13)、(15) ~ (17), 定义  $h_1 = \tau_m$ ,  $h_2 = \tau_M + h$ , 可以得到包含时变时滞、信号量化和事件触发机制的 NCSs 模型如式(18) 所示。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(K + \Omega_K)x(t - \tau(t)) - B(K + \Omega_K)\partial_k(t) + B\omega(t), \\ t \in [t_k h + \tau_{t_i}, t_{k+1} h + \tau_{t_{i+1}}) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - h_0, t_0 - h_1] \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $\varphi(t)$  是  $x(t)$  的初始函数。为了便于分析, 给出如下定义与引理。

定义 1 若下面两个条件同时满足, 则称闭环系统是渐近稳定的并且  $L_2$  扰动抑制水平为  $\gamma$  [20]。

1) 系统在  $\omega(t) \equiv 0$  条件下是渐近稳定的;

2) 在零初始条件下, 任何非零的  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  和给定的  $\gamma > 0$ , 有  $\|x(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$ 。

引理 1 给定一个对称矩阵  $\Omega_1$  和具有适当维数的实矩阵  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$ 。当且仅当存在一个  $L \in \zeta$  满足:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \Omega_3^T L \Omega_3 & * \\ \Omega_2 & -L \end{bmatrix} < 0$$

其中,  $\zeta = \{ \text{diag}(s_1 I, \dots, s_k I, s_1, \dots, s_l) : 0 < s_i \in R, 0 < s_j \in R^{n \times n}, k, l \in Z^+ \}$ 。不等式  $\Omega_1 + \text{sym}(\Omega_2 \Delta \Omega_3) < 0$  对于所有的  $\Delta \in \Theta$  成立。其中,  $\Theta = \{ \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_k, \xi_1 I, \dots, \xi_l I) : \|\Delta\| \leq 1, \Delta \in R^{n \times n}, i=1, \dots, k, \xi_j \in R, j=1, \dots, l, k, l \in Z^+ \}$ 。特别是当  $k=1, l=0$  时,  $\Omega_1 + \text{sym}(\Omega_2 \Delta \Omega_3) < 0$  对所有的  $\|\Delta\| \leq 1$  成立等价于存在  $s_1 > 0$  满足  $\Omega_1 + s_1 \Omega_3^T \Omega_3 + s_1^{-1} \Omega_2^T \Omega_2 < 0$ 。

引理 2 正定矩阵  $R > 0$ ,  $X$  和任常量  $\rho$ , 不等式  $-XR^{-1}X \leq \rho^2 R - 2\rho X$  都成立 [18]。

### 3 $L_2$ 量化控制稳定性分析

该节假定矩阵  $A, B, B_\omega$  和状态反馈控制器增益  $K$  已知, 基于李亚普若夫(Lyapunov) 函数分析和 LMI 方法, 结合式(6), 提出了闭环系统渐近稳定并  $L_2$  扰动抑制水平为  $\gamma$  的充分条件定理 1。

定理 1 对于给定的参数  $h_1, h_2, \gamma, \sigma_1$  和反馈增益  $K$ , 在事件触发机制下, 如果存在合适维数的矩阵  $P = P^T > 0$ ,  $\Psi > 0$ ,  $Q_i = Q_i^T > 0$ ,  $R_i = R_i^T > 0 (i=1, 2)$ ,  $S = S^T > 0$  满足下列的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

则称闭环系统是渐近稳定并且  $L_2$  扰动抑制水平为  $\gamma$ 。其中:

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} Y_1 & * & * & * & * & * \\ R_1^T & Y_2 & * & * & * & * \\ R_2^T & 0 & Y_3 & * & * & * \\ [B(K + \Omega_K)]^T P & S^T & S^T & -2S + \sigma_1 \Psi & * & * \\ -[B(K + \Omega_K)]^T P & 0 & 0 & 0 & -\Psi & * \\ B^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{12}^T = \begin{bmatrix} h_1 A & 0 & 0 & h_1 BK & -h_1 BK & h_1 B_w \\ h_2 A & 0 & 0 & h_2 BK & -h_2 BK & h_2 B_w \\ \alpha A & 0 & 0 & \alpha BK & -\alpha BK & \alpha B_w \end{bmatrix}, \Phi_{22} = \text{diag}$$

$$\{-R_1^{-1}, -R_2^{-1}, -S^{-1}\}, Y_1 = PA + A^T P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2 + I, Y_2 = -Q_1 - R_1 - S, Y_3 = -Q_2 - R_2 - S.$$

证明 构建 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h_1}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h_2}^t x^T(s)Q_2x(s)ds + h_1 \int_{-h_1}^0 ds \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta + h_2 \int_{-h_2}^0 ds \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta + \alpha \int_{-h_1}^0 ds \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta \quad (20)$$

式中:  $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0 (i=1, 2), S > 0, \alpha = h_2 - h_1$ . 对  $V(t)$  进行求导, 同时加上和减去  $\partial_k^T(t)\Psi\partial_k(t)$  这一项, 得:

$$\dot{V}(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)(Q_1 + Q_2)x(t) - x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1) - x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2) + \dot{x}^T(t)[h_1^2R_1 + h_2^2R_2 + \alpha^2S]\dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta - h_2 \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta - \alpha \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta + \partial_k^T(t)\Psi\partial_k(t) - \partial_k^T(t)\Psi\partial_k(t) \quad (21)$$

应用詹森不等式和文献[19]中的方法来处理式(21)中的积分项, 可得到:

$$-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta \leq (x^T(t) \quad x^T(t-h_1)) \times \begin{pmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-h_1) \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$-h_2 \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta \leq (x^T(t) \quad x^T(t-h_2)) \times \begin{pmatrix} -R_2 & R_2 \\ R_2 & -R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-h_2) \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$-\alpha \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta = -\alpha \left[ \int_{t-\tau(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta + \int_{t-h_1}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta \right] \leq -\left[ (t-h_1) - (t-\tau(t)) \right] \int_{t-\tau(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta - \left[ (t-\tau(t)) - (t-h_2) \right] \int_{t-h_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(\theta)S\dot{x}(\theta)d\theta \leq (x^T(t-h_1) \quad x^T(t-\tau(t))) \begin{pmatrix} -S & S \\ S & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix} + (x^T(t-\tau(t)) \quad x^T(t-h_2)) \begin{pmatrix} -S & S \\ S & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-\tau(t)) \\ x(t-h_2) \end{pmatrix} \quad (24)$$

定义:

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h_2) \quad x^T(t-\tau(t)) \quad \partial_k^T(t) \quad \omega^T(t)] \quad (25)$$

结合(17)、(18)、(21)~(25), 由 Schur 补性质, 得:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t)\Phi\xi(t) - x^T(t)x(t) + \gamma^2\omega^T(t)\omega(t) \quad (26)$$

其中  $\Phi = \Phi_{11} - \Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{12}^T, \Phi_{11}, \Phi_{12}$  和  $\Phi_{22}$  都在定理 1 中被定义。

由 Schur 补引理知, 式(20)中的 Lyapunov 泛函保证了式(21)中的  $\dot{V}(t) < 0$ ; 同时易证明在  $\omega(t) \equiv 0$  时闭环系统是渐近稳定的, 且在零初始条件下  $\|x(t)\|_2 < \gamma\|\omega(t)\|_2$ , 证毕。

针对闭环系统, 结合事件触发机制, 定理 1 给出了一个新的  $L_2$  稳定性判据, 且该判据采用的 Lyapunov 泛函不同

于文献[20-21]。

### 4 事件触发与 $L_2$ 量化控制协同设计

该节基于稳定性判据定理 1, 进一步证明并获得了事件触发机制参数, 信号量化和状态反馈  $L_2$  控制的协同设计方法定理 2。

定理 2 对于给定的参数  $h_1, h_2, \gamma, \sigma_1$ , 在事件触发机制下, 如果存在合适维数的矩阵  $X = X^T > 0, \tilde{W} > 0, W > 0, \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i^T > 0, \tilde{R}_i = \tilde{R}_i^T > 0 (i=1, 2), \tilde{S} = \tilde{S}^T > 0$  满足下列的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \gamma W & * \\ Y & I_n \end{bmatrix} > 0 \quad (27)$$

$$2\rho X - \rho^2 I_n \geq W \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{11} & * \\ \Phi'^T_{12} & \Phi'_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

则称闭环系统是渐近稳定并且  $L_2$  扰动抑制水平为  $\gamma$ , 且控制器  $u(t) = Kx(t)$  的反馈增益为  $K = YX^{-1}$ 。

其中:

$$\Phi'_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 & * & * & * & * & * \\ \tilde{R}_1^T & \tilde{Y}_2 & * & * & * & * \\ \tilde{R}_2^T & 0 & \tilde{Y}_3 & * & * & * \\ Y^T B^T & \tilde{S}^T & \tilde{S}^T & \sigma_1 \tilde{\Psi} - 2\tilde{S} & * & * \\ -Y^T B^T & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\Psi} & * \\ B_w^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Phi'^T_{12} = \begin{bmatrix} h_1 AX & 0 & 0 & h_1 BY & -h_1 BY & h_1 B_w \\ h_2 AX & 0 & 0 & h_2 BY & -h_2 BY & h_2 B_w \\ \alpha AX & 0 & 0 & \alpha BY & -\alpha BY & \alpha B_w \\ l_1 B^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & -Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \Omega, X & -\gamma \Omega, X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \Omega, X & -\gamma \Omega, X & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi'_{22} = \begin{bmatrix} -\tilde{X}R_1^{-1}X & 0 & 0 & h_1 B_l^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{X}R_2^{-1}X & 0 & h_2 B_l^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{X}S^{-1}X & \alpha B_l^T & 0 & 0 & 0 \\ l_1 h_1 B^T & l_1 h_2 B^T & l_1 \alpha B^T & -l_1 I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \gamma I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \gamma I_n \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Y}_1 = XA + A^T X + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 + X^T X, \tilde{Y}_2 = -\tilde{Q}_1 - \tilde{R}_1 - \tilde{S}, \tilde{Y}_3 = -\tilde{Q}_2 - \tilde{R}_2 - \tilde{S}.$$

证明 对式(19)进行变形得到:

$$\Gamma + \text{sym}\{N_1^T \Omega, N_2\} + \text{sym}\{N_1^T K N_3\} + \text{sym}\{N_1^T \Omega, K N_3\} < 0 \quad (30)$$

$$\text{式中: } \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{R}_1^T & \mathbf{Y}_2 & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{R}_2^T & 0 & \mathbf{Y}_3 & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} & \mathbf{S}^T & \mathbf{S}^T & -2\mathbf{S} + \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\Psi} & * & * & * & * & * \\ -\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\Psi} & * & * & * & * \\ \mathbf{B}_w^T \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * \\ h_1 \mathbf{A} & 0 & 0 & h_1 \mathbf{BK} & -h_1 \mathbf{BK} & h_1 \mathbf{B}_w & -\mathbf{R}_1^{-1} & * & * \\ h_2 \mathbf{A} & 0 & 0 & h_2 \mathbf{BK} & -h_1 \mathbf{BK} & h_2 \mathbf{B}_w & 0 & -\mathbf{R}_2^{-1} & * \\ \alpha \mathbf{A} & 0 & 0 & \alpha \mathbf{BK} & -\alpha \mathbf{BK} & \alpha \mathbf{B}_w & 0 & 0 & -\mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_1 = [\mathbf{B}^T \mathbf{P} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_1 \mathbf{B}^T \ h_2 \mathbf{B}^T \ \alpha \mathbf{B}^T], \mathbf{N}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{K} \ -\mathbf{K} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{N}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ \boldsymbol{\Omega}_r \ -\boldsymbol{\Omega}_r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

其中  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  在定理 1 中被定义。

运用引理 1 对式(30)进行处理,可以推导存在常量  $\epsilon_i (i = 1, 2, 3)$  满足:

$$\Gamma + \epsilon_1 \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\Omega}_v^2 \mathbf{N}_1 + \epsilon_1^{-1} \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \epsilon_2 \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \epsilon_2^{-1} \mathbf{N}_3^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{N}_3 + \epsilon_3 \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\Omega}_v^2 \mathbf{N}_1 + \epsilon_3^{-1} \mathbf{N}_3^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{N}_3 < 0 \quad (31)$$

由式(27)可得到:

$$\gamma \mathcal{W} - \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \geq 0 \quad (32)$$

使用引理 2 得到  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \geq 2\rho \mathbf{X} - \rho^2 \mathbf{I}_n$ , 由于  $\mathbf{K} = \mathbf{YX}^{-1}$ , 结合式(28)和(32)可以推导出:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{K} \leq \gamma \mathbf{I}_n \quad (33)$$

此时,可知如果下式成立:

$$\Gamma + l_1 \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \epsilon_1^{-1} \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + l_2 \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 < 0 \quad (34)$$

则式(31)成立。

其中:  $l_1 = \epsilon_1 \boldsymbol{\Omega}_v^2 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \boldsymbol{\Omega}_v^2, l_2 = \gamma(\epsilon_2^{-1} \boldsymbol{\Omega}_r^2 + \epsilon_3^{-1} \boldsymbol{\Omega}_r^2), \mathbf{N}_l = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{I}_n \ -\mathbf{I}_n \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

运用 Schur 补引理可知式(34)等价于:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & * & * & * & * \\ l_1 \mathbf{N}_1 & -l_1 \mathbf{I}_n & * & * & * \\ \mathbf{N}_2 & 0 & -\epsilon_1 \mathbf{I}_n & * & * \\ \gamma \boldsymbol{\Omega}_r \mathbf{N}_l & 0 & 0 & -\epsilon_2 \gamma \mathbf{I}_n & * \\ \gamma \boldsymbol{\Omega}_r \mathbf{N}_l & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_3 \gamma \mathbf{I}_n \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

定义  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{XQ}_i \mathbf{X}, \tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{XR}_i \mathbf{X} (i = 1, 2), \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{XSX}, \tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{X\PsiX}$  和  $\mathbf{Y} = \mathbf{KX}$ , 同时在式(35)左右两边分别相应地左乘、右乘  $\text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n\}$  和它们的转置。根据 Schur 补引理,容易得到式(29)。

通过求解式(27)~(29)矩阵不等式,定理 2 提供了一个获得事件触发机制参数矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$ , 信号量化和状态反馈  $L_2$  控制增益矩阵  $\mathbf{K}$  的协同设计有效方法。由于在式(29)矩阵不等式中存在诸如  $\mathbf{XR}_i^{-1} \mathbf{X} (i = 1, 2)$  等非线性项,因此,式(29)是一个非线性矩阵不等式,不能直接用 MATLAB LMI 工具箱求解,需要对矩阵不等式进行线性化处理。为减少式(29)推导出来的 LMI 可能导致的保守

性,本文采用锥形线性化算法(CCLA)进行求解,求解过程类似于文献[22]。

### 5 仿真与结果分析

仿真实验采用文献[15]中的倒立摆系统,数学模型如式(36)所示。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (36)$$

参数矩阵为:

$$\mathbf{B}_w = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{cases} \text{sgn}(\sin t), t \in [0, 10] \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (37)$$

其中小车的质量  $M = 10$ , 摆锤的质量  $m = l$ , 摆臂长  $l = 3$ , 重力加速度  $g = 10$ , 通过计算发现系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值是  $\{0 \ 0 \ 1.8257 \ -1.8257\}$ , 因此在没有控制器的作用下,系统是不稳的。系统状态  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \ \mathbf{x}_2^T(t) \ \mathbf{x}_3^T(t) \ \mathbf{x}_4^T(t)]^T$ , 这里  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$  分别表示小车的位置,小车的速度,摆锤的摆角和摆锤的角速度。取初始状态值为  $\mathbf{x}_0 = [0.98 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ 。

一方面在保证系统稳定前提下,运用定理 2,选取参数  $\sigma_1 = 0.1, \rho = 1, \boldsymbol{\Omega}_r = \boldsymbol{\Omega}_v = 0.85, h = 0.1, h_1 = 0.01, h_2 = 0.11$  和  $\gamma = 200$ , 使用 CCLA 进行 MATLAB 仿真,通过数值计算说明本事件触发机制的优越性。将提出的事件触发机制的平均发送周期与文献[15, 19, 23-24]触发机制的平均发送周期进行比较,结果如表 1 所示。

表 1 不同触发机制下的平均发送周期

触发机制	平均发送周期
事件触发(6)	0.7222
事件触发 <sup>[19]</sup>	0.6567
事件触发 <sup>[15]</sup>	0.3375
自触发 <sup>[15]</sup>	0.1782
最大传输间隔 <sup>[23]</sup>	0.0168
事件触发 <sup>[24]</sup>	$< 10^{-5}$

从表1中可知,本文事件触发机制的平均发送周期大于其他触发机制,则状态信号传输的次数较少。并得到相应的状态反馈控制增益和事件触发矩阵为:

$$K = [1.6267 \quad 8.3140 \quad 255.3158 \quad 141.0340] \quad (38)$$

$$W = \begin{bmatrix} 4.6780 & -0.0324 & -0.1214 & 0.1628 \\ -0.0324 & 3.9404 & 0.2817 & -0.5930 \\ -0.1214 & 0.2817 & 5.2526 & -1.2360 \\ 0.1628 & -0.5930 & -1.2360 & 7.3082 \end{bmatrix} \quad (39)$$

在式(38)和(39)的作用下,设定仿真时间  $t \in [0, 20]$ , 则只有 27 次采样信息被发送给控制端,仅占有所有采样点的 13.5%,系统的采样信号释放时刻和释放间隔如图 2 所示。

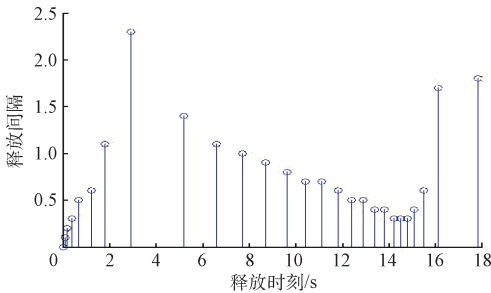


图 2 采样信号释放时刻与释放间隔

相应的系统状态响应如图 3 所示,系统状态收敛,说明了通过定理 2 所获得的事件触发机制参数和状态反馈增益矩阵的有效性。

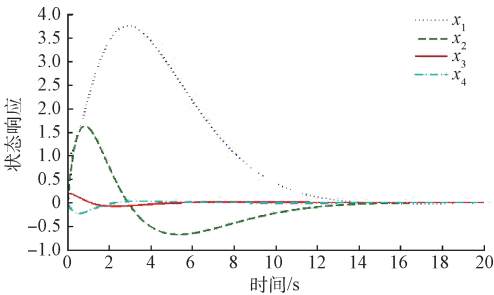


图 3 闭环系统状态响应

另一方面,为验证本文给出的事件触发机制,量化和  $L_2$  控制协同设计方法的鲁棒性,给出了在不同量化密度下系统到达稳定状态的时间。与文献[20]比较,选取参数  $\gamma = 200$ , 令  $\sigma_1 = 0.1, \rho = 1, h = 0.1, h_1 = 0.01, h_2 = 0.11$ , 运用定理 2 和 CCLA, 在不同量化密度下  $\rho_r = \rho_v = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  下,得到系统到达稳定状态的时间如图 4 所示。

从图 4 中可看出,在 5 个不同量化密度下得到了系统达到稳定状态的 5 个时间点,发现当量化密度  $0.7 \leq \rho_r = \rho_v \leq 0.9$  时,系统到达稳定的时间小于 55 s,该结果要优于

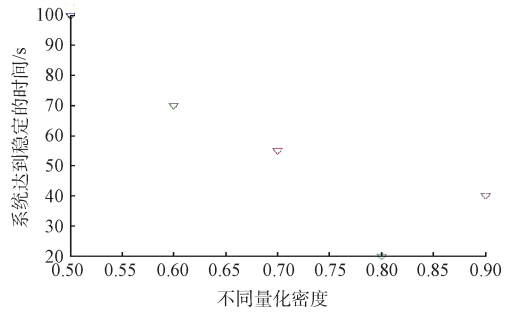


图 4 不同量化密度所对应的系统到达稳定时间

文献[20]得到的 100 s,从而说明了本文提出的协同设计方法具有更好的鲁棒性。

## 6 结 论

为降低网络信道带宽有限对 NCSs 的影响,本文提出一个事件触发机制进行按需传输状态信息,构建了包含网络传输延时,信号量化和事件触发机制的 NCSs 的数学模型。基于该模型,运用 Lyapunov 函数分析和 LMI 方法,提出了  $L_2$  稳定性判据。基于该判据,提出了事件触发机制与  $L_2$  量化控制的协同设计方法。运用该方法,可通过调整一个或多个参数进行网络资源合理调度,从而取得控制性能和网络资源之间更好的折中。最后,通过仿真实验说明了设计方法的有效性。本文提出的设计方法,没有考虑事件触发器,控制器和量化器的计算时间,以及无线网络中的数据丢包问题,这些都是以后的工作中需要去进一步深入研究的。

## 参考文献

- [1] 郑学理,付敬奇. 基于 PDR 和 RSSI 的室内定位算法研究[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(5): 1177-1185.
- [2] 陈晓飞,凌有铸,陈孟元. 基于 ZigBee 技术的温、湿度控制系统[J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(9): 1298-1305.
- [3] 甘志强,王科,杨志勇,等. 基于 ZigBee 技术的低功耗智能气象传感器设计[J]. 电子测量技术, 2015, 38(2): 96-100.
- [4] 雷斌,张鑫. 基于 WSN 野外监测系统应用层通信协议的研究[J]. 国外电子测量技术, 2015, 34(2): 43-46.
- [5] ZHAN Y J, MA S C, ZHUANG T, et al. Research on network integration technology of observation stations[J]. Instrumentation, 2015, 2(3): 35-42.
- [6] 龙雨强,凌强,郑伟. 基于事件触发的网络化控制系统的  $L_2$  稳定性分析[J]. 信息与控制, 2016, 45(2): 171-176.
- [7] LIU W, WANG Z M, NI M K. Quantized feedback stabilization for a class of linear systems with

- nonlinear disturbances [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2013, 54(8):48-56.
- [8] PENG C, TIAN Y C. Networked  $H_\infty$  control of linear systems with state quantization[J]. Information Sciences, 2007, 177(24):5763-5774.
- [9] NIU Y G, DANIEL W. Control strategy with adaptive quantizer's parameters under digital communication channels [J]. Automatica, 2014, 50(10):2665-2671.
- [10] ZHANG X M, HAN Q L. Event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(4):226-234.
- [11] ZHANG J H, FENG G. Event-driven observer-based output feedback control for linear systems [J]. Automatica, 2014, 50(7):1852-1859.
- [12] YU H, ANTSAKLIS P J. Event-triggered output feedback control for networked control systems using passivity: Achieving  $L_2$  stability in the presence of communication delays and signal quantization [J]. Automatica, 2013, 49(1):30-38.
- [13] LI H P, SHI Y. Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems[J]. Automatica, 2014, 50(5):1507-1513.
- [14] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9):1680-1685.
- [15] WANG X F, LEMMON M D. Self-triggered feedback control systems with finite-gain  $L_2$  stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(3):452-467.
- [16] 张进, 彭晨. 基于事件触发的网络化 T-S 模糊系统容错控制[J]. 信息与控制, 2016, 45(1):73-78.
- [17] LAM H K, SENEVIRATNE L D. LMI-based stability design of fuzzy controller for nonlinear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2007, 1(1):393-401.
- [18] JIA X C, ZHANG D W, HAO X H, et al. Fuzzy  $H_\infty$  tracking control for nonlinear networked control systems in TS fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2009, 39(4):1073-1079.
- [19] HU S L, YUE D. Event-triggered control design of linear networked systems with quantizations[J]. ISA Transactions, 2012, 51(1):153-162.
- [20] YAN H C, YAN S, ZHANG H, et al.  $L_2$  control design of event-triggered networked control systems with quantizations [J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(1):332-345.
- [21] PENG C, YANG T C. Event-triggered communication and control co-design for networked control systems [J]. Automatica, 2013, 49(5):1326-1332.
- [22] JIANG X F, HAN Q L, LIU S R, et al. A new  $H_\infty$  stabilization criterion for networked control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4):1025-1032.
- [23] CARNEVALE D, TEEL A R, NESIC D. Further results on stability of networked control systems: a lyapunov approach [C]. American Control Conference, 2007:1741-1746.
- [24] TABUADA P, WANG X F. Preliminary results on state-triggered scheduling of stabilizing control tasks[C]. 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006:282-287.

## 作者简介

吴杰, 上海大学工学硕士, 检测技术与自动化装置, 主要研究方向基于事件触发的网络控制系统。

E-mail: muziqi5566@163.com

付敬奇, 上海大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为无线传感网络、仪表智能化、网络化等。

E-mail: jqfu@staff.shu.edu.cn