

DOI:10.19651/j.cnki.emt.1802083

# 一种计算任意形状孔缝平均电极化率密度的方法

王金田<sup>1</sup> 刘雪明<sup>1</sup> 商宝莹<sup>2</sup> 李志勇<sup>3</sup> 穆晓彤<sup>4</sup>

(1.中车长春轨道客车股份有限公司 长春 130062; 2.佛山市顺德区航测电磁兼容技术有限公司 佛山 528300;  
3.深圳市北航检测有限公司 深圳 518000; 4.北京航空航天大学 北京 100091)

**摘要:** 孔缝耦合是电磁干扰最主要的途径,如何计算孔缝耦合对排查电磁干扰十分重要。现有文献中解析计算任意形状孔缝平均电极化率密度的方法是基于超几何函数理论的。该方法虽然能够较为精确地计算出任意形状孔缝的平均电极化率密度,但由于超几何函数对于非数学专业的工程人员来说过于复杂,因此这种计算孔缝平均电极化率密度的方法很少被应用于电磁场工程实践中。针对这一问题,提出了一种新的解析公式,在不损失精度的前提下,大大简化了计算,可以显著提高孔缝耦合问题的解决效率。核心思想是将任意孔缝的平均电极化密度计算问题转化计算无数小圆孔平均电极化率密度的算术平均值,进而推导出一个简单函数沿孔缝边缘进行线积分的解析式,应用该解析式即可十分方便地计算出任意形状孔缝的平均电极化率密度。

**关键词:** 孔缝耦合; 仿真计算; 电磁干扰; 平均电极化率密度

**中图分类号:** TN98    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** 510.102

## Method for calculating the average electric polarizability density of aperture with arbitrary shape

Wang Jintian<sup>1</sup> Liu Xueming<sup>1</sup> Shang Baoying<sup>2</sup> Li Zhiyong<sup>3</sup> Mu Xiaotong<sup>4</sup>

(1. CRRC Changchun Railway vehicles Co., Ltd., Changchun 130062, China;

2. Foshan Shunde Hangee Electromagnetic Compatibility Technology Co., Ltd., Foshan 528300, China;

3. Shenzhen Beihang Testing Co. Ltd, Shenzhen 518000, China; 4. Beihang University, Beijing 100091, China)

**Abstract:** Aperture coupling is the most important way of electronic interference. In the existing literatures, the method of calculating the average electrical susceptibilities of arbitrary shaped apertures is based on hypergeometric theory. Although this method can accurately calculate the average electric polarization density of small holes in any shape, the hypergeometric function is too complex for the engineers of non-mathematics. Therefore, the method of calculating the average electric polarization density of small holes is seldom used in the field of electromagnetic field engineering. In order to solve this problem, a new analytical formula is proposed in this paper, which greatly simplifies the calculation without loss of precision, and can greatly improve the efficiency of the solution of the small hole coupling problem. The core idea of this method is to convert the calculation of the average electric polarization density of a small hole to the arithmetic average of the average electrical polarization rate density of numerous small circular holes, and then deduce an analytic formula of the line integral along the edge of a small hole. The average electrical polarization rate density.

**Keywords:** aperture coupling; simulation and calculation; electromagnetic interference; average electric susceptibility density

## 0 引言

在微波工程中,经常需要知道一个孔缝对电磁场的耦合情况。例如,定量地计算出两段不同尺寸的波导通过它们共同波导壁上的孔缝耦合情况<sup>[1]</sup>,这对于设计微波系统是非常重要的。因此在 80 多年前就有许多学者开始研究

孔缝耦合问题。早在 1944 年, Bethe<sup>[1]</sup>就率先提出了著名的孔缝耦合理论。根据 Bethe 的孔缝耦合理论,无限大薄导电屏上圆形孔缝的散射场可以表示为孔缝内的虚拟电偶极矩和磁偶极矩的辐射场,而孔缝内虚拟电偶极矩可以通过孔缝的平均电极化密度快速求出。Bethe 只求出了圆形孔缝的平均电极化率密度,因此该方法当时只能用于计算

圆形孔缝的电磁耦合问题。

此后,许多学者致力于求解各种形状孔缝的平均电极化率密度。例如, Cohn<sup>[2]</sup>发明了一种在电解液中进行实测的方法,该方法将开有任意形状孔缝的薄金属板放入施加了静电场的电解液中,并测量金属板两侧电解液的电压,从而根据电压值计算孔缝的平均电极化率密度。但 Cohn 的方法需要实际加工带有特定形状孔缝的金属板,并且要在电解槽中进行实测,因而很不方便。因此,一些学者转而寻求数值和解析方法。基于矩量法,文献[3-5]开发了一种能够计算任意形状孔缝平均电极化率密度的方法,但该方法需要对孔缝进行建模及剖分,一般需借助专业仿真软件进行计算,也不是很方便快捷。Fabrikant<sup>[4]</sup>给出了一个解析公式,将该解析公式应于任意形状的孔缝,即可推导出用于计算该形状孔缝平均电极化率密度的公式。Fabrikant 的方法是基于他较早时候推导出的用积分来表示孔缝内任意两点间距离的倒数。Fabrikant 应用他的解析公式求出了五边形、矩形、菱形、十字形、扇形的平均极化率密度计算公式,而且应用这些公式得到的结果与文献中其他方法得到的结果的一致性非常好,计算的精度令人满意。但是, Fabrikant 方法的不便之处在于对每一种特定形状的孔缝,均需要经过非常复杂的推导过程才能最终得到计算这种孔缝平均极化率密度的公式,这对于非数学专业的工程人员来说,是一项非常困难的任务,这个特点极大地限制了 Fabrikant 方法的广泛应用<sup>[6-8]</sup>。

为此,本文提出了一种较为简便的解析方法,可以快速计算出任意形状孔缝的平均电极化率密度。该方法与 Fabrikant 方法相比,计算复杂度很小,能够为一般工程人员所掌握,具有实际工程应用价值。

### 1 平均极化率密度理论

为便于表示薄金属屏上孔缝的散射场,人们定义了电偶极矩和磁偶极矩。孔缝电偶极矩  $\vec{P}_e$  的定义式为<sup>[9]</sup>:

$$\vec{P}_e = -\frac{\epsilon}{2} \iint_{\text{小孔}} \vec{r} \times \vec{K}(r') r' dr' d\theta \quad (1)$$

式中:  $\vec{K}(r')$  为孔缝内位置  $r'$  处的感应磁流密度。

孔缝的磁偶极矩  $\vec{P}_m$  的定义式为:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{\mu} \iint_{\text{小孔}} r' \eta(r') r' dr' d\beta \quad (2)$$

式中:  $\eta(r')$  为孔缝内位置  $r'$  处的感应磁荷密度。

由电偶极矩产生的散射场  $\vec{E}_e(\vec{r})$  为:

$$\vec{E}_e(\vec{r}) = \frac{\vec{P}_e}{2\pi\epsilon} \left( k^2 \hat{z} + \nabla \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \quad (3)$$

式中:  $\hat{z}$  是金属屏的法矢量;  $k$  是波数。

由磁偶极矩产生的散射场  $\vec{E}_m(\vec{r})$  为:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{-jk\mu}{2\pi} \left( \nabla \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \right) \times (\vec{P}_m) \quad (4)$$

根据式(1)和(2),电偶极矩和磁偶极矩均与孔缝的面积和形状有关。而且,孔缝内的感应磁流密度和感应磁荷密度均与入射电场  $\vec{E}_0$  和入射磁场  $\vec{H}_0$  有关。这样,为研究孔缝的形状和面积与其场耦合特性的关系,人们又定义了孔缝的电极化率矢量  $\vec{\alpha}_e$  和磁极化率张量  $\vec{\alpha}_m$ 。

$$\vec{P}_e = \epsilon \vec{\alpha}_e \vec{E}_0 \times \hat{n} \quad (5)$$

$$\vec{P}_m = \vec{\alpha}_m \vec{H}_0 \quad (6)$$

式中:  $\hat{n}$  为孔缝的单位法矢量。根据式(5)和(6),如果已知  $\vec{P}_e$ 、 $\vec{P}_m$ 、入射电场  $\vec{E}_0$ 、入射磁场  $\vec{H}_0$ , 那么就可以计算出电极化率矢量  $\vec{\alpha}_e$  和磁极化率张量  $\vec{\alpha}_m$ 。但是,由于获取孔缝内的感应磁流密度  $\vec{K}(r')$  与感应磁荷密度  $\eta(r')$  比较困难,因此仅有几种特殊形状孔缝的电偶极矩  $\vec{P}_e$  和磁偶极矩  $\vec{P}_m$  可以根据式(1)和(2)算出。其中表 1 给出了用于计算圆形和椭圆形孔缝的电极化率矢量  $\vec{\alpha}_e$  和磁极化率张量  $\vec{\alpha}_m$  的计算解析式<sup>[10]</sup>。通过表 1 可以得到计算不同形状孔缝的主要公式参数。

表 1 圆形和椭圆形孔缝的电极化率矢量

$\vec{\alpha}_e$ 和磁极化率张量 $\vec{\alpha}_m$		
参数	圆形	椭圆形
$ \vec{\alpha}_e $	$2a^3/3$	$\pi\omega^2 l/3E(e)$
$ \alpha_{mx} $	$4a^3/3$	$\pi e^2 l^3/3(K(e) - E(e))$
$ \alpha_{my} $	$4a^3/3$	$\pi e^2 l^3/3((\frac{l}{\omega})^2 E(e) - K(e))$

在表 1 中,  $\vec{\alpha}_m = \alpha_{mx} \hat{x}\hat{x} + \alpha_{my} \hat{y}\hat{y}$ , 椭圆的长轴为  $2l$ , 短轴为  $2\omega (l \geq \omega)$ 。表 1 中  $e$  为椭圆的偏心率, 等于  $\sqrt{1 - (\omega/l)^2}$ 。  $K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}$  是第一类椭圆积分,  $E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta$  是第二类椭圆积分。

尽管式(5)和(6)给出的电极化率和磁极化率的定义能够消除入射场的影响,但它们的值仍然是由孔缝的形状和面积决定的。为了专门研究孔缝的形状与其电磁耦合能力之间的关系,按式(7)和(8)给出了平均电极化率密度  $\tau_{av}$  和平均磁极化率密度  $\bar{\rho}_{av}$  表达式。

$$\vec{\alpha}_e = \tau_{av} s^{\pm} \quad (7)$$

$$\vec{\alpha}_m = \bar{\rho}_{av} s^{\pm} \quad (8)$$

式(7)、(8)中  $s$  是孔缝的面积。平均电极化率密度  $\tau_{av}$  和平均磁极化率密度  $\bar{\rho}_{av}$  是无量纲的,因而它们与孔缝的面积无关。换句话说,如果两个孔缝的面积不同但形状相同,那么它们对应的平均电极化率密度  $\tau_{av}$  和平均磁极化率密度  $\bar{\rho}_{av}$  分别相等。例如所有的圆形孔缝,不论其面积为多少,其平均电极化率密度  $\tau_c$  均为  $\tau_c = \frac{4}{3\pi\sqrt{\pi}}$ , 是一个常量。

## 2 计算孔缝平均电极化率密度的新方法

根据以上分析,计算孔缝耦合场的关键在于求出孔缝的平均电极化率密度和平均磁极化率密度。然而,一般来说,直接解析计算任意形状孔缝的平均电极化率密度和平均磁极化率密度并非一件容易的事。尽管 Fabricant 基于超几何函数开发了一种求解孔缝平均极化率密度的方法,但该方法的数学推导过程极为复杂,而且对于每一种形状的孔缝均需重新推导新的解析式<sup>[11-13]</sup>。尽管非常复杂,Fabricant 方法得到的解仍然不是精确解。当孔缝的长宽比相对较大时,用 Fabricant 方法得到的平均极化率密度与实测值之间的差异较大。

本文提出了一种新的解析方法,可以较简便地计算出孔缝的平均极化率密度,且精度也与 Fabricant 方法较为接近。

如图1所示,设无限大导电屏上孔缝的轮廓为 $\rho(\theta)$ 。为了使 $\rho(\theta)$ 的平均波动最小,在图1中将极坐标的原点选在了孔缝的几何重心上。

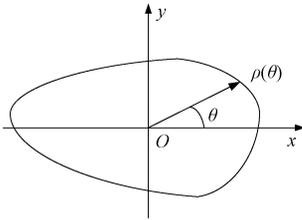


图1 在无限大导电屏上的任意形状孔缝

根据平均极化率密度的定义,对于图1所示的任意形状孔缝,可得:

$$\alpha = \tau_{av} \cdot s_0^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

式中: $\alpha$ 为孔缝的电极化率; $\tau_{av}$ 为孔缝的平均电极化率密度; $s_0$ 为孔缝的面积。现在,先用一个圆形孔取代原来的孔缝,这个圆形孔的圆心取在原来孔缝的重心上,半径为 $\rho(\theta_1) |_{\theta=0}$ 。那么这个圆孔的电极化率 $\alpha_1$ 为:

$$\alpha_1 = \tau_c \cdot (\pi\rho^2(\theta_1))^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

式中: $\tau_c$ 是圆形孔的平均电极化率密度,其值为常量 $\tau_c = \frac{4}{3\pi\sqrt{\pi}}$ 。由于原来孔缝的轮廓函数 $\rho(\theta)$ 为已知,则 $\rho(\theta_1) |_{\theta=0}$ 为已知量,那么这个圆孔的电极化率 $\alpha_1$ 也为已知量。类似地,反复用半径为 $\rho(\theta_2)$ 、 $\rho(\theta_3)$ 直至 $\rho(\theta_n = 2\pi)$ ( $0 = \theta_1 < \theta_2 < L < \theta_n = 2\pi$ )的圆孔取代原来的孔缝,且所有圆孔的圆心均设置在原来孔缝的重心上。那么这些圆孔的电极化率分别由式(11)~(13)给出。

$$\alpha_1 = \tau_c \times (\pi\rho^2(\theta_1))^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\alpha_2 = \tau_c \cdot (\pi\rho^2(\theta_2))^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\alpha_n = \tau_c \cdot (\pi\rho^2(\theta_n))^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

将式(11)~(13)相加,可得:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \tau_c \cdot (\pi\rho^2(\theta_i))^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

显然,某些 $\alpha_i$ 大于 $\alpha$ ,而某些 $\alpha_i$ 小于 $\alpha$ 。取这些 $\alpha_i$ 的算术平均值作为 $\alpha$ 的近似值,可得:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \approx \alpha = \tau_{av} \cdot s_0^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_c \cdot (\pi\rho^2(\theta_i))^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

然后令 $n \rightarrow \infty$ ,则式(15)变为:

$$\alpha = \tau_{av} \cdot s_0^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\sqrt{\pi}\tau_c}{2} \int_0^{2\pi} \rho^3(\theta) d\theta \quad (16)$$

根据式(16),可得原来孔缝的平均电极化率密度计算式为:

$$\tau_{av} \approx \frac{\sqrt{\pi}\tau_c}{2s_0^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \rho^3(\theta) d\theta \approx \frac{2s_0^{-\frac{1}{2}}}{3\pi} \int_0^{2\pi} \rho^3(\theta) d\theta \quad (17)$$

为了说明式(17)比 Fabricant 的方法简单,现在给出 Fabricant 的公式如下:

$$\tau_{av} = \frac{1}{s_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} \omega(r, \theta) r dr d\theta \quad (18)$$

其中,

$$\omega(r, \theta) = \frac{\delta}{\rho(\theta)} [\rho^2(\theta) - r^2]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$\delta = \frac{-4\pi}{\sqrt{s_0}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nabla^2 \int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^{|n|} \frac{x dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2(\theta_0) - x^2}{\rho^2(\theta_0)} \cdot F\left(2 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 2; 1 - \frac{x^2}{\rho^2(\theta_0)}\right) \exp[jn(\theta - \theta_0)] d\theta_0 \quad (20)$$

式中: $F\left(2 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 2; 1 - \frac{x^2}{\rho^2(\theta_0)}\right)$ 是所谓的超几何函数,它的表达式非常复杂。可以看出,对于一个非数学专业的人来说,由式(18)计算任意形状孔缝的平均极化率密度都不是一件容易的事,而采用本文推导出的式(17),则要简单得多。

表2给出了分别应用本文方法、Fabricant的方法以及二者之间的相对误差。由表2可以看出,本文方法与 Fabricant 方法的计算结果较为接近。

表2 两种方法得到的几种孔缝的平均电极化率密度

孔缝形状	Fabricant 的方法	本文方法	相对误差/ %
三角形	0.225 1	0.214 7	4.62
正方形	0.235 7	0.226 9	3.73
正五边形	0.238 0	0.229 8	3.45
长方形(长宽比为5)	0.146 2	0.142 1	2.80

Fabricant 计算电磁波在孔缝中传播的平均电极化率密度的方法是经过国内外相关科研和工程应用领域的专家普遍认可的计算方法,并且,该方法对电磁波通过孔缝的平均电极化率密度计算已经应用于很多仿真软件中,并已经

过许多应用案例验证<sup>[14-16]</sup>。

本文提出的方法是通过将无限大平面的孔缝进行无穷小分解后,再进行积分计算得到最终求解结果。该方法在计算电磁波通过孔缝时的平均电极化率密度不需要对超越方程进行求解,因此,计算过程与传统的 Fabricant 计算方法相比要简单很多。本方法通过计算机编程后计算电磁波的孔缝耦合平均电极化率密度,要比传统计算软件节省 80% 的时间。

综上所述,本文提出的计算电磁波孔缝耦合平均电极化率密度的方法相对传统方法具有计算简便、正确率高的优势,非常适合用于计算机仿真计算求解。

### 3 结 论

孔缝耦合是引起电磁干扰的重要因素,如何从理论上计算电磁波孔缝耦合结果,计算出电磁波通过孔缝时产生的平均电极化率密度是极为重要的。

传统数值方法计算电磁波通过孔缝时的平均电极化率密度都是采用 Fabricant 方法。Fabricant 方法是一种基于电动力学理论的矢量超越方程算法。现有的对电磁波孔缝耦合的仿真计算都是基于 Fabricant 方法。Fabricant 方法计算结果与实际测量结果相比,误差一般在 5% 以内,因此,通常认为通过该方法的计算结果是可信的。

本文提出了一种用于计算任意形状孔缝平均电极化率密度的新方法。该新方法是通过将无限大平面的孔缝进行无穷小分解后,再进行积分计算得到最终求解结果的解析算法。与 Fabricant 的方法相比,本文的计算方法较为简单,这是因为本文只需对一个初等函数进行积分,通过验证可知,本文提出的计算方法计算结果却与 Fabricant 的方法非常接近,也能够达到 Fabricant 的计算结果精度,可以作为电磁波孔缝耦合时平均电极化率密度的数学验证方法。本方法通过计算机编程后计算电磁波的孔缝耦合平均电极化率密度,要比传统计算软件节省 80% 的时间。与传统方法相比,具有较大的优势,适用于计算机仿真计算求解。

### 参考文献

- [1] BETHE H A. Theory of diffraction by small holes[J]. Physical Review, 1944, 66(7-8):163-182.
- [2] COHN S B. The electric polarizability of apertures of arbitrary shape [J]. Proceedings of the Ire, 1952, 40(9):1069-1071.
- [3] OKON E E, HARRINGTON R F. The polarizabilities

of electrically small apertures of arbitrary shape[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 1981, EMC-23(4):359-366.

- [4] FABRIKANT V I. Electrical polarizability of small apertures: analytical approach [J]. International Journal of Electronics, 1987, 62(4):533-545.
- [5] COLLIN R. Field theory of guided waves[C]. Field Theory of Guided Waves. McGraw-Hill, 1960.
- [6] KUMMEL S, AKOLA J, MANNINEN M. Thermal expansion in small metal clusters and its impact on the electric polarizability [J]. Physical Review Letters, 2000, 84(17):3827.
- [7] 周金山,刘国治,王建国.矩形孔缝耦合特性实验研究[J].强激光与粒子束,2003(12):1228-1232.
- [8] 毕增军,刘尚合.静电放电电磁场与金属腔体孔缝耦合的数值研究[J].强激光与粒子束,2003(11):1083-1086.
- [9] 郝新红,白钰鹏,何娟.高功率微波孔缝耦合特性的数值模拟及防护加固技术[J].探测与控制学报,2006(4):34-38.
- [10] 邓云,张骅,许家栋.窄缝屏蔽耦合的研究[J].电子测量技术,2007,30(5):25-28.
- [11] 刘凤坤,傅君眉,周辉,等.电磁脉冲对目标腔体的孔缝耦合效应数值研究[J].电波科学学报,1999,14(2):202-206.
- [12] 葛欣宏,宁飞,李晓林.光电系统监测设备电磁屏蔽设计的系统法研究[J].国外电子测量技术,2014,33(9):42-45,58.
- [13] 罗静雯,杜平安,任丹,等.一种基于 BLT 方程的孔缝箱体屏蔽效能计算方法[J].物理学报,2015,64(1):62-69.
- [14] 谭旭,宋祖勋,朱光耀.多形状孔缝耦合分析及其实验研究[J].计算机工程与应用,2009,45(21):206-208.
- [15] 高雪莲,马士杰,杨凯,等.考虑高次模的孔缝腔体屏蔽效能计算方法[J].高电压技术,2017,43(10):3344-3350.
- [16] 毛湘宇,杜平安,聂宝林.基于 TLM 的机箱孔缝电磁屏蔽效能数值分析[J].系统仿真学报,2009,21(23):7493-7497.

### 作者简介

王金田,1965 年出生,本科,副总工,主要研究方向为轨道客车环境适应性试验。

E-mail:ledisun@163.com